# Die Zusammensetzung der Kräfte.

---

**Inaugural-Dissertation**

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

**Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg**

vorgelegt von

**Ernst Goerges**

aus Magdeburg.

---

**Halle a. S.**

Buchdruckerei des Waisenhauses.

1909.

Referent: Herr Professor Dr. Gutzmer.

Meinen lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0020

# Einleitung.

Die Kräftezusammensetzung ist zum ersten Male im 18. Jahrhundert historisch-kritisch behandelt worden, und zwar bei dem Beweise des Parallelogramms der Kräfte von D. Bernoulli[1]) und Lambert.[2]) Später gibt Lagrange[3]) einen kurzen Abriß der Geschichte der mechanischen Prinzipien und erwähnt dabei die Kräftezusammensetzung. Diese früheren Darstellungen sind in den Arbeiten von C. Jacobi[4]) und H. Westphahl[5]) zusammengefaßt worden. Fünfzig Jahre später hat A. H. Westphahl[6]) jene Schriften nochmals in einer Dissertation geprüft und ergänzt. Ebenso wie diese Arbeiten sind auch die Andeutungen, welche sich bei Rühlmann[7]) und Rosenberger[8]) finden, nicht vollständig, da viele wichtige Beweise fehlen und die ersten 18 Jahrhunderte in der Geschichte der Kräftezusammensetzung lückenhaft behandelt worden sind. Bei einer eingehenden Prüfung der klassischen Werke der Mechanik habe ich eine Kenntnis der Kräftezusammensetzung bei vielen Autoren feststellen kännen, welche in den oben erwähnten Schriften nicht angeführt worden sind. In den Dissertationen von Jacobi, Westphahl, A. H. Westphahl sind die Resultate von Aristoteles und Archimedes betreffs der Kräftezusammensetzung nur angedeutet, anscheinend aber nicht geprüft worden, die Arbeiten von Huygens, Euler, La Hire, Joh. Bernoulli, Lamy und Wallis, von denen besonders die beiden letzten wichtig sind, sind gar nicht angeführt worden.

---

1) D. Bernoulli, Examen principiorum . . . Comment. Acad. Petrop., T. I, 1728, S. 128.

2) Lambert, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik II, S. 468. Berlin 1770.

3) Lagrange, Mécanique analytique, Einleitung.

4) C. Jacobi, Praecipuorum inde a Newtone conatuum compos. vir. dem. recensio. Göttingen 1817. Diese Schrift ist mir leider nicht zugänglich gewesen.

5) H. Westphahl, Demonstr. compos. vir. Expos. Göttingen 1817.

6) A. H. Westphahl, Die Beweise des Parallelogramms der Kräfte, Dissert. Göttingen 1867.

7) Rühlmann, Vorträge über Geschichte d. technischen Mechanik. Leipzig 1885.

8) Rosenberger, Geschichte der Physik III, S. 429. Braunschweig 1887.

Die Arbeiten der früheren Autoren werden nur kurz angedeutet, denn A. H. Westphahl legt das Hauptgewicht auf die Beweise für das Parallelogramm der Kräfte. Aber auch die Reihe dieser Beweise hat große Lücken, denn es fehlen diejenigen von Aimé, Cauchy, Raabe, Navier, Hearn, Ide, Redtenbacher, Monge, Poinsot, Minding und Möbius, also etwa ein Drittel aller vorhandenen. Von den Beweisen, welche nach dem Jahre 1867 erschienen sind, habe ich diejenigen von Délègue, Boltzmann und Lehmann-Filhes in diese Arbeit aufgenommen. Im übrigen habe auch ich nur diejenigen angeführt, welche etwas Neues bringen und nicht im Grunde genommen Reproduktionen der früheren Beweise sind.

In keiner dieser früheren geschichtlichen Darstellungen ist die Zusammensetzung paralleler Kräfte berücksichtigt worden. Bei einer genaueren Durchsicht der Literatur habe ich Andeutungen hierüber bei Varignon und Lamy gefunden. Wirkliche Beweise geben erst Foncenex, Monge, Poinsot, Poisson und andere.

---

# I. Teil.

## 1. Die Zusammensetzung der Bewegungen.

Die Zusammensetzung der Bewegungen wird im Altertum zuerst in der Schrift *Προβλήματα μηχάνικα*[1]), welche dem Aristoteles zugeschrieben wird, erwähnt. Das geschieht in folgenden drei Sätzen:

1. Wenn etwas in einem Verhältnis bewegt wird, so daß es eine gerade Linie durchlaufen muß, dann wird dies die Diagonale einer Figur sein, welche die in diesem Verhältnis zusammengesetzten Linien bestimmen.
2. Bleibt das Verhältnis zweier Bewegungen nicht dasselbe, dann beschreibt der Körper einen Kreis. Die einzelnen Bewegungen heißen: Bewegung nach der Natur (in der Richtung der Tangente) *κατὰ φύσιν κατὰ τὴν περιφερείαν* und Bewegung gegen die Natur (in der Richtung der Normale) *παρὰ φύσιν εἰς τὸ πλάγιον καὶ τὸ κέντρον.*
3. Geschieht eine Bewegung längs den Seiten eines Rhombus, so erscheint es sonderbar, daß der von der zusammengesetzten

1) Aristoteles Opera II, S. 848.

Bewegung zurückgelegte Weg kleiner ist als jede der einzelnen Seiten des Rhombus.

Als Grund führt er den stumpfen Winkel der Figur an[1]) (*κατὰ τὴν ἀμβλυτέραν τὴν γωνίαν*).

In diesen drei Sätzen ist nirgends das Prinzip der Stetigkeit erwähnt worden; besonders beim zweiten Satz wirkt dies störend. Denn da über die Art der Änderung des Verhältnisses zweier Bewegungen nichts ausgesagt wird, so ist bei einer derartigen zusammengesetzten Bewegung noch nicht erwiesen, daß die Bahn ein Kreis ist.

Für den ersten Satz, der bis ins 19. Jahrhundert eine große Rolle spielt[2]), gilt das zu 3. oben Gesagte. Dagegen hat Aristoteles in Satz 3 ganz richtig erkannt, daß die Resultante eine Funktion des Winkels ist, den die Komponenten einschließen.

Archimedes gebraucht die Zusammensetzung von Bewegungen, um die Spirale zu konstruieren.[3]) Er sagt:

„Wenn eine gerade Linie um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichmäßiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausgegangen ist, und wenn zugleich auf der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit, von dem unbeweglichen Endpunkt anfangend, sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Spirale."

A. H. Westphahl schreibt in seiner Dissertation[4]), Archimedes habe das Parallelogramm der Bewegungen auf die Konstruktion von Kurven angewandt. Das ist insofern irrtümlich, als Archimedes das Prinzip der Zusammensetzung mittels der Parallelogrammkonstruktion nicht gekannt hat und keine direkte Methode, Bewegungen zusammenzusetzen, angegeben hat.

Was Archimedes über die Zusammensetzung von Bewegungen gesagt hat, ist rein axiomatisch. Er legt mehr Gewicht auf die Stetigkeit als Aristoteles; denn die zusammengesetzten Bewegungen sollen mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich gehen.

Nach einer langen Zeit der Unfruchtbarkeit auf dem Gebiete der Mechanik finden wir erst bei Galilei wieder eine Behandlung des Problems der Zusammensetzung von Bewegungen.

---

1) Aristoteles Opera II, S. 854.

2) Voigt, Elementare Mechanik S. 7. Leipzig 1889.

3) Archimedes' Werke II, S. 10, Ausgabe Heiberg, *Περὶ ἑλίκων*.

4) A. H. Westphahl, Die Beweise des Parallelogramms der Kräfte, S. 1 Dissertation. Göttingen 1867.

Er stellt folgende Sätze auf:[1])

1. Wenn ein Körper nach zwei Richtungen gleichförmig bewegt wird und zwar nach einer horizontalen und vertikalen, so ist die aus beiden zusammengesetzte Bewegung in der „Potenz“ gleich jenen beiden Momenten.
2. Ein Körper werde nach zwei Richtungen bewegt; der senkrechten entspreche die Strecke $AB$, der horizontalen in derselben Zeit die Strecke $BC$. Da nun in gleichen Zeiten bei gleichförmiger Bewegung die Strecken $AB$ und $BC$ zurückgelegt werden, so verhalten sich auch die Bewegungsmomente wie $AB$ und $AC$. Der Körper wird die Diagonale $AC$ beschreiben und sein Geschwindigkeitsmoment wird $AC$ sein. Aber $AC$ ist in der „Potenz“ gleich $AB$, $BC$; mithin ist das aus beiden zusammengesetzte Moment nur in der „Potenz“ gleich jenen beiden.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze zeigt Galilei die Zusammensetzung der Bewegung bei geworfenen Körpern und kommt zu dem Resultate: „Ein Körper, der in horizontaler Richtung vom Stoß getrieben wird und in vertikaler Richtung durch die Schwere angezogen wird, durchläuft unter dem Einfluß beider Kräfte die Diagonale eines Rechtecks. Dabei muß die Zeit so klein angenommen werden, daß auch die Geschwindigkeit des Falls sich wenig ändert.“

Galilei geht insofern über Aristoteles hinaus, als er die Bewegungen durch ihnen entsprechende Strecken darstellt, Impulse, Bewegungsmomente, welche diese Bewegungen hervorrufen, einführt und schließlich die Bewegung mit der Zeit verknüpft. Bei der Anwendung des Theorems auf die Wurfbahn wirkt dagegen hemmend, daß die Zeit unendlich klein angenommen wird. Die Untersuchungen haben daher nur im Unendlichkleinen Gültigkeit.

Diese Einsicht scheint mir für die Beurteilung Galileis bedeutungsvoll zu sein. Und wenn Rühlmann schreibt:[2])

„Verfasser kann sich nicht zu der Ansicht verstehen, als ob Galilei zur Ermittelung der Bahn geworfener Körper das Parallelogramm der Kräfte in Anwendung gebracht habe. In keiner einzigen seiner Untersuchungen hat er das angedeutet.“

so dürfen wir diese Auffassung nach den obigen Darlegungen wohl als irrig ansehen.

---

1) Galilei Dialog, IV. Tag, Ostwalds Klassiker 24, S. 91—94.

2) Rühlmann, Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, S. 63. Leipzig 1885.

Von Galilei sind offensichtlich die Arbeiten späterer Autoren wie Roberval und Huygens beeinflußt worden. Eine neue Ableitung für die Zusammensetzung der Bewegungen an und für sich geben beide nicht; sie nehmen dieselbe als Erfahrungstatsache hin und wenden sie praktisch auf die Geometrie und Physik an.

Roberval gebraucht die Zusammensetzung der Bewegungen zur Konstruktion von Tangenten an Kurven[1]); er sagt:

„Wenn ein Körper von zwei Bewegungen getragen wird, eine jede geradlinig und gleichförmig, dann wird die aus diesen beiden zusammengesetzte auch geradlinig und gleichförmig sein, verschieden von den beiden, aber mit ihnen in einer Ebene liegend. Die gerade Linie, welche der bewegliche Körper beschreibt, wird die Diagonale eines Parallelogrammes sein, dessen Seiten untereinander im Verhältnis der Geschwindigkeiten des Körpers stehen."

Diesen Satz wendet er folgendermaßen zur Konstruktion von Tangenten an Kurven an. Um eine Tangente an eine Kurve zu konstruieren, muß man die verschiedenen Bewegungen, welche ein Punkt auf der Kurve an der bezeichneten Stelle hat, untersuchen. Setzt man diese Bewegungen in eine zusammen und zieht die Linie für die Richtung dieser zusammengesetzten Bewegung, dann hat man die gesuchte Tangente an die Kurven.

Roberval beweist aber nicht, daß die zusammengesetzte Bewegung in die Richtung der Tangente fällt, sondern nimmt dies als Tatsache an.

Huygens wendet die Zusammensetzung der Bewegungen bei der Bestimmung der Bahn eines Körpers unter dem Einfluß der Schwere an.[2])

Er geht aber nicht über Galilei hinaus und zeigt nur, daß sich der Körper ohne Einfluß der Schwere in einer geraden Linie nach $CD$, unter der Wirkung derselben nach $CF$ bewegen würde. Beide Bewegungen zusammengesetzt bringen ihn nach $CE$. (Figur 1).

Huygens vernachlässigt, daß eine solche Zusammensetzung nur für unendlich kleine Zeiten gelten kann. In dieser Hinsicht weicht seine Konstruktion von der Galileis ab, welcher als Bahn die Diagonale des Rechtecks nimmt.

Die Zusammensetzung von Bewegungen, die seit Galilei mit kinetischen Elementen vermischt ist, verschwindet zur Zeit Newtons und Varignons immer mehr. Im 18. Jahrhundert erschienen noch

1) Mémoires de l'académie des sciences de Paris IV. Bd., 1693, Roberval, Observations sur le mouvement des corps.

2) Huygens, Horologium oscillat. II, S. 3, Opera S. 52. Leyden 1724.

zwei Arbeiten, von denen die eine[1]) von Büsch zur Aristotelischen Zusammensetzung von Bewegungen zurückkehrt. Die andere[2]) von Kant führt einen neuen Raumbegriff ein, nämlich den absoluten und den relativen Raum. Die auf unsern Gegenstand bezügliche Stelle lautet bei Kant:

„Die Zusammensetzung zweier Bewegungen eines und desselben Punktes kann nur gedacht werden, daß die eine im absoluten Raum, statt der andern aber eine mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung geschehende Bewegung des relativen Raumes als mit derselben einerlei vorgestellt wird.

Unter der Einwirkung beider Bewegungen schreitet der Körper in der Richtung der Diagonale des Parallelogrammes fort."

Diese Kantische Auffassung nähert sich der Aristotelischen, bei der auch nicht beide Bewegungen dem Punkt zugleich gegeben werden.

Eine Zerlegung der Bewegungen findet sich später bei Mac Laurin[3]) und bei Euler.[4]) Es ist dies dieselbe Methode der Zerlegung nach zwei oder drei Koordinatachsen, die im 19. Jahrhundert gebräuchlich ist.

## 2. Zusammensetzung der Kräfte.

Auf S. 9 haben wir angedeutet, daß die Zusammensetzung der Bewegungen zur Zeit Newtons und Varignons zurückgedrängt wird. Man untersucht nicht mehr reine Bewegungen, sondern nimmt hinter ihnen eine bewegende Ursache an, die causa motrix, wie Wallis sagt. Allerdings wird noch kein Versuch gemacht, den Satz auf rein mathematischer Grundlage zu beweisen, er wird vielmehr nur erläutert.

Gewöhnlich schreibt man diese neuen Ideen Newton und Varignon zu, doch wird ihnen, wie mir scheint, der Ruhm der Entdeckung durch Wallis und Lamy streitig gemacht. Ich finde nämlich, daß Newton die Arbeiten Wallis' wahrscheinlich gekannt hat. Freilich hat er sie nicht zitiert, aber das Parallelogrammgesetz findet sich bei Wallis in ähnlicher Fassung[5]) wie bei Newton. Die bisher wohl übersehene Stelle bei Wallis lautet:

---

1) Büsch, Versuch einer Mathematik II, S. 38—40. Dieselbe Aristotelische Auffassung findet sich auch schon bei Descartes Prinzipien d. Philosophie (Philosoph. Bibl. Bd. 28, S. 46. Leipzig 1908).

2) Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften.

3) MacLaurin, A complete system of fluxious art. 495ff., 1742.

4) Euler, Theoria motus corporum, 1765, deutsch von Wolfers, S. 22. Greifswald 1852.

5) Wallis Opera I, S. 998, Mechanica III, Kap. X, S. 8.

„Wenn ein Körper unter der Einwirkung zweier Bewegungsursachen zwei Stöße empfängt, welche nach geraden Richtungen wirken und einen Winkel miteinander bilden, dann bewegt er sich nach der Diagonale eines Parallelogrammes, wenn die Geschwindigkeiten unter sich gleich und den Seiten eines Parallelogrammes proportional sind. Diese Geschwindigkeit verhält sich zu der gegebenen wie die Diagonale des Parallelogrammes zu den entsprechenden Seiten."

Dem gegenüber bedeutet meines Erachtens Newtons[1]) Satz nichts Neues:

„Ein Körper beschreibt in derselben Zeit durch Verbindung zweier Kräfte die Diagonale eines Parallelogrammes, in welcher er vermöge der einzelnen Kräfte die Seiten beschrieben haben würde."

Bei beiden Autoren, Wallis und Newton, klingt der Satz wie eine Erfahrungstatsache und wird auch nicht bewiesen.

Im Jahre 1687 erscheinen in Frankreich die Werke Varignons[2]) und Lamys[3]), in welchen die Zusammensetzung der Kräfte gegeben wird. In dem späteren Werk „Nouvelle Mécanique", zu welchem das erste „Projet d'une nouvelle mécanique" nur der Entwurf ist, geht Varignon auf die Aristotelische Zusammensetzungsart zurück und veranschaulicht den Satz zuerst für die Anschauung (l'imagination).[4]) Er schreibt:

„Punkt $A$ bewegt sich längs $AB$, während sich diese Linie längs $AC$ bewegt, indem sie sich selbst parallel bleibt. Die Geschwindigkeiten sollen sich wie die Seiten $AB$, $AC$ des Parallelogrammes $AB$ $CD$ verhalten. Dann wird Punkt $A$ durch das Zusammenwirken der beiden Kräfte veranlaßt, die Diagonale des Parallelogrammes zu durchlaufen."

Im Anschluß daran gibt er eine Erläuterung, ohne die bewegliche Linie zu Hilfe zu nehmen; der Körper soll nur durch völlig voneinander unabhängige Kräfte getrieben werden. Lamy geht ebenfalls von der Aristotelischen Zusammensetzung der Bewegungen aus und gelangt zu der bekannten Parallelogrammkonstruktion. Er hegt aber zwei neue Gedanken über das Gleichgewicht und den Fall paralleler Kräfte:

1. Wird ein Körper nach $CA$ und $CB$ von zwei Kräften getrieben, so geht er auf keiner der Richtungen derselben vorwärts, sondern

1) Newton, Philosophiae naturalis principia p. 15. London 1779.
2) Varignon, Projet d'une nouvelle mécanique. 1587, Paris.
3) Lamy, Nouvelle manière de démontrer les principeaux théor. de mécan. 1687.
4) Varignon, Nouvelle mécanique, 1725, p. 13.

in der Richtung $CX$. Ist dieser Weg versperrt, dann herrscht Gleichgewicht. Will man allgemein einen Körper ins Gleichgewicht bringen, dann muß man den Weg der resultierenden Kraft schließen.

2. Für den Fall paralleler Kräfte herrscht Gleichgewicht, wenn die Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Entfernungen vom Angriffspunkt. Dies weist er nach an einem fallenden Stabe.

Lamy ist der erste gewesen, welcher die Lehre vom Gleichgewicht auf die Kinetik übertragen und die Statik als einen Spezialfall derselben angesehen hat. Man hat ihm vorgeworfen, daß er seine Gedanken dem Werke Varignons entlehnt habe. Er verteidigt sich heftig dagegen und da sich Varignon selbst an dem Streit nicht beteiligt hat, so ist es schwer zu entscheiden, wem die Priorität zukommt.

Von einem neuen Gesichtspunkte gehen die 1736 erschienenen Untersuchungen Eulers aus; sie weichen insofern von den früheren ab, als sie sich auf Sätze der Statik stützen. Euler sagt[1]):

„Wird ein Punkt von mehreren Kräften getrieben, denen eine Kraft $AM$ gleichwertig ist, dann hält die dieser entgegengesetzt gleiche Kraft den andern das Gleichgewicht. $AM$ wirkt dann auf den Punkt so, als ob alle Kräfte in ihm vereinigt wären."

Den Abschluß dieser Art der Behandlung des Problems bildet die Dynamik von D'Alembert.[2])

D'Alembert verwirft die Aristotelische Zusammensetzung der Bewegungen und die Anschauung, daß die Kräfte den Körper während der ganzen Dauer der Bewegung beeinflussen. Es sollen sich vielmehr nur die Anfangsimpulse zusammensetzen. Die Richtung der Bewegung bleibt dieselbe, mögen die Kräfte nur im Anfang oder während der ganzen Dauer der Bewegung auf den Körper wirken.

Ist $AD$ der zurückgelegte Weg, dann kann man sich in $D$ zwei Kräfte in den Richtungen $DB$ und $DC$ so angebracht denken, daß der Körper in Ruhe bleibt. Die Ebene, in der die Bewegungsursachen wirken, soll längs der beiden Führungen $KL$ und $MM$ gleiten und parallel mit sich bewegt werden. Alle Punkte $g$ der Ebene beschreiben dann die Gerade $ga$ und da diese von vier parallelen, paarweise gleichen und entgegengesetzten Bewegungsursachen beeinflußt wird, so müssen $ga$ und $AD$ zusammenfallen (Fig. 2).

1) Euler, Mechanica sive motus scientia S. 42. 1736.
2) D'Alembert, Dynamik. Ostwalds Klassiker 106, S. 30—38.

### 3. Die rein statische Behandlung der Kräftezusammensetzung.

Die statische Behandlung der Kräftezusammensetzung lauft bis ins 18. Jahrhundert völlig getrennt neben der kinetischen her. Die ersten Anfänge greifen auf das Altertum zurück und finden sich bei Archimedes, welcher folgende Sätze aufstellt[1]):

1. Wenn zwei gleiche Größen nicht gleichen Schwerpunkt haben, so liegt der Mittelpunkt einer aus beiden zusammengesetzten Größe in der Mitte der geraden Linie, welche die Schwerpunkte der Größen verbindet.

Im Satz 5 wird dies verallgemeinert:

2. Wenn die Schwerpunkte dreier Größen in einer geraden Linie liegen, auch die Größen selbst gleiches Gewicht haben, so wird der Schwerpunkt einer aus allen dreien zusammengesetzten Größe derjenige Punkt sein, welcher auch Schwerpunkt der mittleren Größe ist.

Diese zusammenzusetzenden Kräfte sind parallel, denn es ist die Schwerkraft, welche auf die einzelnen Größen wirkt. Archimedes gibt aber keinen Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptungen, sondern erläutert nur die einzelnen Fälle.

Erst wieder im Ausgang des Mittelalters finden sich bei Leonardo de Vinci, der sich viel mit dem Prinzip des Hebels beschäftigt hat, Andeutungen der statischen Behandlung des Problems der Kräftezusammensetzung.

Aus folgenden Sätzen in den Manuskripten Leonardos[2]) schließt Duhem[3]), daß ersterer die Zusammensetzung der Kräfte bewiesen und die Darstellungen von Stevin und Roberval übertroffen habe.[4])

1. Wenn der Winkel, welcher durch das Zusammentreffen zweier Fäden im Aufhängepunkte eines Körpers gebildet wird, durch die Zentrallinie des Körpers geteilt wird, dann ist dieser Winkel in zwei Teile geteilt, welche in demselben Verhältnis stehen, in welchem das Gewicht auf die Fäden verteilt wird.
2. Wenn zwei Fäden in verschiedenen Richtungen von demselben Punkt ausgehen und sich mit den äußersten Ecken eines Balkens vereinigen, der beliebig gegen sie geneigt liegt, dann befindet

---

1) Archimedes, Werke II., Das Gleichgew. d. Ebenen, Ausg. Heiberg, S. 146—153.

2) Les Manuscriptes de Leon. de Vinci par Mollien-Ravaisson. Paris 1883.

3) Duhem, Origines de Statique I., S. 30, 31, S. 170 ff., Biblioth. math. 1903, S. 338—343.

4) Ms. E fol. 66, Paris 1883. Ms. G fol. 39, Paris 1890.

sich immer der Schwerpunkt des Balkens in derselben Mittellinie mit dem Treffpunkt der größten Höhen, welche auf den Fäden möglich sind.[1])

Aus diesen Sätzen, welche in ähnlicher Fassung wiederholt werden, kann man keineswegs auf eine Kenntnis des Kräfteparallelogramms schließen. Im ersten Satz nimmt Leonardo das Verhältnis der Teile des Winkels statt der trigonometrischen Tangenten. Aus dem zweiten Satz sucht P. Duhem den folgenden herauszulesen[2]):

„In Bezug auf einen Punkt der Resultante haben die beiden Komponenten Momente von entgegengesetzten Zeichen, aber absolut gleichem Wert."

Dies ist jedoch schwer zu rechtfertigen, da der ziemlich unklare Satz Leonardos sich nur auf den Schwerpunkt bezieht.

Es ist wohl auch ausgeschlossen, daß spätere Autoren aus Leonardos Werken geschöpft haben, denn seine Schriften sind erst später (1797) durch die Veröffentlichungen Venturis[3]) bekannt geworden. Außerdem gehen die Untersuchungen von Stevin und Roberval von ganz andern Gesichtspunkten aus. Leonardo stützt sich auf den Hebel, Stevin auf die schiefe Ebene, deren Prinzip er beweist.[4])

Stevin sagt dort, daß drei Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn sie der Größe und Richtung nach den drei Seiten eines Dreiecks entsprechen.

Hierin liegt der Satz vom Kräfteparallelogramm versteckt, wenn man das Dreieck, dessen Seiten den Kräften entsprechen, zum Parallelogramm ergänzt. Die Diagonale dieses Parallelogramms kann als Resultierende angesehen werden.

Bei dem Aufschwung, den die Kinetik zur Zeit Galileis und später Newtons nimmt, bleibt die Statik ziemlich vernachlässigt. Wir treffen erst bei Varignon wieder eine Andeutung auf eine statische Behandlung der Kräftezusammensetzung. Varignon beweist folgenden geometrischen Satz[5]):

„Fällt man von einem Punkte $S$ aus die Normalen $SN$, $SM$, $SG$ auf die Seiten resp. die Diagonale des Parallelogramms $ABCD$, dann ist: $AD \cdot NS = AB \cdot SM + AC \cdot GS$ (Fig. 3)."

---

1) Ms. E.
2) Duhem, Bibliotheca mathem., S. 338—343.
3) Mach, Prinzipien der Mechanik, S. 126, V. Auflage.
4) Stevin, Werke, S. 448—449. Leyden 1634.
5) Varignon, Nouvelle mécanique, Abschnitt V, Satz 16. 1725.

Aus dieser rein geometrischen Beziehung kann man den Satz von der Zusammensetzung der Momente dreier in einer Ebene liegender konvergenter oder paralleler Kräfte herauslesen. Lagrange sagt[1]), daß man den Satz auch so fassen kann:

„Zwei nach Größe und Richtung in einer Ebene durch zwei Gerade dargestellte Kräfte lassen sich zu einer zusammensetzen, wenn man von einem Punkt auf die Kräfte das Lot fällt. Dann ist:

Kraft I · Lot I + Kraft II · Lot II = Resultante · Lot III."

Liegt der betreffende Punkt innerhalb des Winkels der beiden Kräfte, dann ist das Produkt: Resultante · Lot III gleich der Differenz der Produkte.

Varignons Untersuchungen über die statische Zusammensetzung der Kräfte werden von seinem Zeitgenossen La Hire[2]) übertroffen. Letzterer bestimmt das Gleichgewicht am Hebel und kommt dann zur Zusammensetzung der Kräfte. Er findet die Resultante als die Kraft, welche im Unterstützungspunkte des Hebels angreift. Gegenüber den früheren Untersuchungen ist neu, daß La Hire zum ersten Male das Prinzip der Kraftverlegung ausspricht.[3])

In Satz 21 behandelt er das Gleichgewicht dreier an einem Punkt angreifender Kräfte, welches er aus drei am Hebel wirkenden Kräften ableitet. Er nimmt auf einer Geraden $HB$ einen Punkt $E$ an und zieht durch ihn zu den Richtungen der am Hebel wirkenden Kräfte die Parallelen, welche die Richtungen der Kräfte in $G$ und $F$ schneiden, dann stellen $KE$, $KG$, $KF$ drei Kräfte dar, d. h. sie entsprechen ihnen. Dann ist nach einem vorher bewiesenen Hilfssatz (Satz 12):

$$\text{Kraft } A : \text{Kraft } X = \sin EKF : \sin EKD$$
$$= \sin \widehat{XB} : \sin \widehat{BA}$$
$$\text{Kraft } X : \text{Kraft } B = \sin \widehat{AB} : \sin \widehat{XA}$$

d. h. die drei Kräfte stehen im Verhältnis der sinus der Winkel $EKF$, $FEK$, $EFK$.

La Hire gibt weniger die Bestimmung der Resultante zweier Kräfte als vielmehr die Bedingungen des Gleichgewichtes dreier Kräfte.

Ebenfalls von drei sich das Gleichgewicht haltenden Kräften geht Euler[4]) aus. Die Kräfte werden von ihm als Gewichte angesehen und verhalten sich wie die darstellenden Seiten. Zwei entgegengesetzt

1) Lagrange, Mécanique analytique, Section I, Seite 14 und 15. Paris 1788.
2) La Hire, Traité de mécanique, S. 70—81. Paris 1695.
3) Dasselbe, Seite 12, Satz III.
4) Euler, Opera posthuma II, S. 1 und 2, Statica. Petersburg 1852.

gleiche Kräfte halten sich das Gleichgewicht. Im Falle des Gleichgewichts gelten die Beziehungen:

$$P : Q : R = \sin DAC : \sin BAD = \sin BAC \quad \text{(Fig. 4)}.$$

Zur Auffindung derjenigen Kraft, welche zweien das Gleichgewicht hält, benutzt er als erster in der Statik die Parallelogrammkonstruktion:

„Aus $AB$ und $AC$ konstruiere man das Parallelogramm und trage auf der rückwärts verlängerten Diagonale $AE = AD$ ab, dann hält diese den Kräften $AB$ und $AC$ das Gleichgewicht."

Er gestaltet die Konstruktion auch noch anders:

„Er verbindet $B$ mit $C$, halbiert $BC$ in $F$ und trägt auf der Verlängerung von $FA$ in $A$ $2FA$ ab und erhält so die gesuchte Kraft. Daraus leitet er dann die Resultante zweier Kräfte ab und findet sie, indem er diejenige Kraft sucht, welche den gegebenen das Gleichgewicht hält. Die ihr entgegengesetzt gleiche ist dann die Resultante."

In demselben Werk gibt Euler[1]) noch eine Zusammensetzung der Kräfte mit Hülfe der Theorie der Momente. Euler definiert das Moment als das Produkt der Kraft in das Lot vom Beziehungspunkte auf die Kraft. Er setzt dann die Kräfte durch die Momente zusammen (Fig. 5). Den Angriffspunkt der resultierenden Kraft findet er aus der Gleichung:

$$AC \cdot AO \sin ACO = BD \cdot BO \sin DBO.$$

Größe und Richtung der Resultante findet Euler durch folgende Konstruktion:

„Von $B$ aus wird $B$ parallel und gleich $AC$ gezogen, $C$ mit $D$ verbunden und in $e$ halbiert. $Bm = 2Be$ gemacht und dann durch $O$ die Parallele $OM = BM$ gezogen. $OM$ ist dann die Resultante."

An diese Methode von La Hire scheint sich Johann Bernoulli[2]) anzulehnen. Er geht ebenso wie La Hire vom Hebel aus und setzt die Kräfte so zusammen, daß die aus $PA$ und $PB$ resultierende Kraft die Lage hat:

$$\begin{aligned} PA : PB &= \sin BPC : \sin APC \\ &= \sin BPD : \sin APD. \end{aligned}$$

Er konstruiert einen Hebel, indem er die Lote $CE$ und $CF$ zieht und die Kräfte $PA$ und $PB$ unter Beibehaltung ihrer Richtung nach $E$ und $F$ verlegt. Nach dem Hebelgesetz folgert er:

$$\begin{aligned} \text{Kraft } A : \text{Kraft } B &= E : F = CF : CE \\ &= \sin EPF : \sin CBE = CB : CA \\ &= PA : PB. \end{aligned}$$

1) Euler, Opera posthuma II, S. 25, Statica. Petersburg 1852.
2) Joh. Bernoulli, Opera, 1742, S. 246.

Er erhält so die Richtung der Resultante als Diagonale des Parallelogrammes. Die Größe bestimmt Joh. Bernoulli wie Euler aus drei sich das Gleichgewicht haltenden Kräften.

## II. Teil.

### Neuere Beweise des Kräfteparallelogrammes.

Gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts beginnt eine neue Ära in der Geschichte des Problems der Kräftezusammensetzung. In den jetzt erscheinenden Abhandlungen wird der Versuch gemacht, die Zusammensetzung der Kräfte mit Hilfe mathematischer Grundsätze zu beweisen. Diese Beweise ziehen die Geometrie und Analysis, zugleich auch spezielle Gebiete der Mechanik heran.

Mach[1]) kritisiert den ersten von D. Bernoulli gegebenen und damit auch alle andern Beweise. Er verwirft die Meinung, daß „der Satz vom Kräfteparallelogramm eine geometrische, von physikalischen Erfahrungen unabhängige Wahrheit sei.“ Ähnlich urteilt auch Rosenberger.[2])

Alle Beweise stützen sich auf gewisse Axiome, welche auf ihre Richtigkeit zu prüfen sind. Diese Grundsätze lauten:

I. Die resultierende Kraft ist durch die Komponenten eindeutig bestimmt.

Dieser Satz ist durchaus notwendig, denn die Kräfte sollen ja zu einer einzigen Resultante zusammengesetzt werden.

II. Die Richtung der Resultante zweier Kräfte liegt mit den Richtungen der Kräfte in einer Ebene. Dies wird von manchen Autoren so bewiesen, daß die Möglichkeit, es könnte anders sein, ausgeschlossen wird.

III. Die Richtung der Resultante zweier gleicher Kräfte halbiert den Winkel, welchen die Richtungen der Komponenten miteinander bilden. Das ist das Prinzip der Symmetrie, welches aussagt, daß die Resultante in den Winkel der beiden Kräfte fällt und ihn bei gleichen Kräften halbiert. Es ist aber damit noch nicht gesagt, daß dies derjenige Winkel ist, welcher kleiner als $180^0$ ist.[3]) Wenn dies auch durch die Praxis bestätigt wird, so gilt der Satz doch nur als Erfahrungstatsache.

1) Mach, Die Prinzipien der Mechanik, V. Aufl., S. 43. 1905.
2) Rosenberger, Geschichte d. Physik, III., S. 329—31. Braunschweig 1887.
3) Mach, D. Prinz. d. Mech., S. 46.

IV. Statt einer Anzahl Kräfte darf stets die Resultierende gesetzt werden und umgekehrt. Bei der Zusammensetzung mehrerer Kräfte ist die Reihenfolge gleichgültig. Es ist aber nicht allgemein eine Resultante vorhanden, z. B. bei gleichen antiparallelen Kräften (Kräftepaar).

V. Die Resultante von zwei ähnlichen Systemen von Kräften, welche je auf einen Punkt wirken, verhalten sich wie zwei einander entsprechende Kräfte.

VI. Eine Kraft ist das $m$-fache einer anderen, wenn sie die $m$-fache Wirkung hat.

VII. Zwei Kräfte verhalten sich wie $m:n$, wenn die erste das $m$-fache, die zweite das $n$-fache derselben dritten Kraft ist.

VIII. Bei stetiger Zunahme der Seitenkräfte wächst auch die Resultante stetig. Dieser Satz ist von größter Wichtigkeit für alle Beweise, ist aber von manchen Autoren vernachlässigt worden (Foncenex).

IX. Die Resultante mehrerer an einem Punkt angreifender Kräfte, welche in derselben Richtung wirken, ist gleich ihrer algebraischen Summe.

X. Der Angriffspunkt einer Kraft an einem starren Körper darf nach einem beliebigen Punkt desselben in ihrer Richtung verlegt werden.

Wir wollen diese neueren Beweise nach den angewandten Prinzipien einteilen in:

1. geometrische,
2. analytische,
3. auf Grundsätzen der Mechanik,
4. auf parallelen Kräften beruhende Beweise.

Einige Beweise wie die von D. Bernoulli, Duchayla, D'Alembert und Poisson sind bahnbrechend gewesen. An sie schließen sich die andern mehr oder minder selbständig an. Es sind hier nur die angeführt, welche wesentlich Neues bringen und Fortschritte gegen die früheren machen.

### 1. Die geometrischen Beweise.

Diese können wir nach den grundlegenden Beweisen und Ideen in drei Gruppen einteilen.

Für die erste Gruppe dieser Beweise ist der von D. Bernoulli maßgebend gewesen. Besonders seine Bestimmung der Größe der Resultante ist in vielen anderen Beweisen, auch analytischen, angewandt

worden. Auf ihn stützen sich die Untersuchungen von D'Alembert Lambert, Eytelwein und Skarella.

D'Alembert hat Bernoullis Beweis verbessert; desgleichen schließen sich die Beweise von Lambert und Eytelwein an ihn an, obwohl sie eine neue Beziehung zwischen den Winkeln der Resultante mit den Kräften einführen.

Allen Beweisen liegen die Axiome I—VIII zugrunde und sie gehen von zwei rechtwinklig aufeinander wirkenden Kräfte aus.

Beweis von Daniel Bernoulli.[1])

Sind die Kräfte gleich, dann fällt die Halbierungslinie des Winkels mit der Richtung der Resultante[2]) zusammen und deren Größe ist dann $a\sqrt{2}$. Sind sie ungleich, dann ist die Größe $\sqrt{a^2+b^2}$ und ihre Richtung ist die Diagonale des Rechtecks über den Seitenkräften. Für Kräfte, welche einen beliebigen Winkel einschließen, wendet D. Bernoulli folgende Konstruktion an (Fig. 6):

$DA$ und $DC$ sind die zusammenzusetzenden Kräfte, $DA$ wird in zwei zueinander senkrecht wirkende Kräfte $DP$ und $DF$ zerlegt, dann zieht man $DC=FL$. Im Rechteck $PDLS$ ist dann $DS$ Resultante von $DP$, $DF$, $FL$, also von $DP$ und $DL$. Diese Kräfte sind äquivalent $DC$ und $DA$. Also ist $DS$ die Resultante von $DA$ und $DC$.

Bei dieser Bestimmung der Resultierenden setzt er voraus, was erst zu beweisen ist, daß sich nämlich die beiden Seitenkräfte wieder in je zwei zerlegen lassen.

Die Richtung wird folgendermaßen gefunden (Fig. 7):

Zwei gleiche Kräfte $AB$ und $BC$ sind einer Kraft $BE$ gleichwertig, welche den Winkel der Kräfte halbiert. Dieselbe Resultante haben auch zwei andere Kräfte $BD$ und $BF$, welche den Winkel $ABE$ und $CBE$ halbieren. Durch geometrische Konstruktionen zerlegt er die Resultante $BE=b$ und findet die Größe von $BD=BF$:

$$x=b\sqrt{\frac{a}{2a+b}}.$$

Im Falle, daß $\angle ABC=90^0$ ist:

$$x=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

1) Comment. Acad. Petrop. 1728, Tome I, S. 126, Examen principiorum.

2) Seit Bernoulli bürgern sich die Worte Resultante, Komponente ein, welche sich allerdings schon bei Varignon finden (Nouvelle Mécanique I, S. 7). In deutschen Abhandlungen steht dafür oft Mittelkraft und Seitenkraft.

Aus alledem folgt, daß $BD$ und $BF$ der Kraft $BE$ äquivalent sind, allgemein gilt das für alle Kräfte, welche jenen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ halbieren. Er zeigt auf diese Weise die Zusammensetzung von Kräften in allen Fällen, wo diese als Seiten eines Rhombus dargestellt werden, dessen Winkel einem aus folgender Reihe gleich sind.

$$R,\ {}^1/_2 R,\ {}^1/_4 R \ldots\ldots\ R = 90^0.$$

Durch derartige Winkelteilungen gelangt er zum allgemeinen Fall.

Beweis von D'Alembert.[1])

Wesentlich anders als D. Bernoulli geht D'Alembert von drei sich das Gleichgewicht haltenden gleichen Kräften aus, welche unter $120^0$ wirken. Er begründet dies damit, daß für eine andere Möglichkeit kein Grund vorhanden ist. Diese damals übliche Begründungsweise drückt aus, daß in der Erfahrung kein anderer Fall bekannt ist und entbehrt infolgedessen als empirische Tatsache der nötigen Strenge.

Dann zeigt er, daß, falls zwei gleiche Kräfte eine Resultante $R$ haben, diese auch Resultante der Kräfte ist, welche unter dem Winkel $\frac{120^0}{2^n}$ und allgemein $p\frac{120^0}{2^n}$ wirken.

Er läßt aber den Fall unerörtert, daß $\frac{p}{2^n}$ irrational sein kann. Der Fortschritt gegenüber dem Beweis von Bernoulli beruht in der Kürze der Darstellung und darin, daß er, statt vor der Zerlegung der Seitenkräfte in je zwei, von der Annahme ausgeht, daß drei gleiche unter $120^0$ wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind.

Beweis von Lambert.[2])

Dieser Beweis umfaßt gewissermaßen die beiden vorigen, nimmt das Brauchbare von ihnen, geht aber bei der Bestimmung der Richtung der Resultante von einem neuen Gedanken aus. Lambert weist zunächst genauer als D'Alembert nach, daß die Zusammensetzung der Kräfte für drei gleiche unter $120^0$ wirkende Kräfte gilt. In ähnlicher Weise kann man sich gleiche Kräfte denken, die einen Kreis in ebensoviel Teile teilen, als Kräfte vorhanden sind. Jede von ihnen wirkt dann soviel als die andern zusammen. Sind ferner drei Kräfte im Gleichgewicht, dann bleiben sie es auch, wenn man ihre Größe in demselben Verhältnis ändert, aber ihre Richtungen ungeändert läßt.

1) Opusc. math. Tome I, 169. Paris 1761.

2) Beyträge zum Gebrauch d. Math. II., S. 468. Berlin 1770.

Die Größe der Resultierenden bestimmt Lambert ähnlich wie Bernoulli. Die Richtung findet er folgendermaßen (Fig. 8):

Im Fall ungleicher Kräfte werden zwei Hilfswinkel eingeführt:

$$\angle \widehat{RP} - \angle BCD = \omega$$
$$\angle ACD = 90^0 - \omega \quad \angle ABC = \varphi.$$

Er beweist dann, daß eine Beziehung besteht, welche $\omega$ durch $\varphi$ ausdrückt. Er erhält dann $\omega = \varphi$, d. h.

$$\angle BCD = \angle CBA,$$

also die Resultante als Diagonale des Parallelogrammes.

Der Beweis wird geführt durch Zerlegung der ursprünglichen Kräfte in rechtwinklig zueinander wirkende Komponenten.

Beweis von Eytelwein.[1])

Die Größe der Resultante wird wie bei D. Bernoulli bestimmt; die Richtung fällt im Fall gleicher Kräfte in die Halbierungslinie des Winkels der beiden Kräfte. Dies wird damit begründet, daß kein anderer Fall denkbar sei. Bei ungleichen Kräften führt Eytelwein ähnlich wie Lambert einen Hilfswinkel ein, den Hypotenusenwinkel im Dreieck $AGP$. Die Richtung der Resultante ist bestimmt durch die Beziehung zwischen $\alpha$ und dem Winkel $\varphi$, den die Resultante mit einer der Kräfte bildet. Durch $G$ wird eine Gerade gezogen, die mit $R$ den Winkel $2\varphi$ bildet, dann lassen sich $P$ und $Q$ zerlegen in:

$$p = \frac{P^2}{R}, \quad q = \frac{P \cdot Q}{R}, \quad q' = \frac{Q^2}{R}, \quad p' = \frac{P \cdot Q}{R}.$$

Wenn: $p - q' = P'$

$p' + q = Q'$, dann ist:

$$P' = \frac{P^2 - Q^2}{R}, \quad Q' = \frac{2\,PQ}{R}.$$

$$P' = R(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = R\cos 2\alpha$$
$$Q' = R\ 2\ \sin\alpha\ \cos\alpha = R\sin 2\alpha.$$

Dem Winkel $2\varphi$ entspricht also der Winkel $2\alpha$; allgemein entspricht dem Winkel $n\varphi$ der Hypotenusenwinkel $n\alpha$.

Beweis von Skarella.[2])

Skarella bestimmt die Größe nach Bernoulli. Daß die Richtung in die Diagonale des Rechtecks fällt, begründet er damit, daß sie im anderen Fall aus diesem heraustreten würde.

Zu diesen Beweisen, soweit sie auf Winkelteilung beruhen, gehört auch der

1) Eytelwein, Handbuch d. Statik, S. 1. Berlin 1808.
2) Skarella, Physica generalis II, S. 435. 1773.

Beweis von Aimé.[1])

Aimé gründet den Beweis auf folgende Voraussetzung:

„Wirken auf einen Punkt vier gleiche Kräfte $P$, $P''$, $P'''$, $P'$ unter den Winkeln $\alpha$, $\gamma$, $\alpha+\gamma$, und ist die Resultante von je zweien gleich der Diagonale des Parallelogrammes, dann ist sie es auch für den Winkel $\gamma+2\alpha$."

Er bestimmt sodann die Resultante für zwei Kräfte unter dem Winkel $2\alpha$, indem er $\gamma=0$ setzt. Dasselbe gilt für den Winkel $\alpha$, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$ . . . $\frac{\alpha}{2^n}$ und analog $2\alpha$, $3\alpha$ . . . $n\alpha$. Daraus schließt er, daß es auch für den Winkel $\frac{n}{2^n}\alpha$ gilt. Der Winkel, für den das Theorem erwiesen ist, ist $\alpha=120^0$.

Im Falle ungleicher Kräfte führt Aimé räumliche Betrachtungen ein. Außerdem wendet er das Prinzip der Superposition an, indem er die beiden gegebenen Kräfte verdoppelt. Durch $SA$ zieht er in $A$ ein Lot derart, daß $\triangle SCC'$ gleichschenklig und $BS=SC=SC'$ wird. Durch Kombination von $BS$ und $SC$, $BS$ und $SC'$ gelangt er zu den beiden Resultanten $2\,SD$ und $2\,SD'$. Diese ergeben $4\,SO$, welche also auch die Resultante von $2\,BS$ und $2\,SA$ ist (Fig. 9).

Die Methode, durch die er zu dem Ausdruck $\frac{n}{2^m}\alpha$ gelangt, ist nicht einwandfrei. Er weist nur nach, daß das Theorem gilt für $\frac{\alpha}{2^n}$ . . . $\alpha$, $2\alpha$, $3\alpha$ . . . $n\alpha$ und folgert daraus ohne weiteres, daß es auch für $\frac{n}{2^m}\alpha$ richtig bleibt. Für das Verhältnis $\frac{n}{2^m}$ gilt dasselbe wie bei D'Alembert.

Eine Reihe Autoren, deren Arbeiten allerdings voneinander unabhängig sind, stützen sich auf die Annahme, daß die Eigenschaften der Kräfte auch auf deren geometrische Darstellungen übertragbar sind. Dies ist besonders bei den Beweisen von Cauchy und Möbius der Fall. An dieser Stelle sei auch ein Beweis von Raabe angeführt, welcher die Kräfte in der komplexen Zahlenebene darstellt.

Die Beweise machen keine besondere Annahme über die Größe der Kräfte und die Winkel, unter denen sie wirken.

Beweis von Burg.[2])

Dieser ist auf reine Überlegung gestützt und bedient sich der Tetragoniometrie. Burg geht davon aus, daß ein Viereck durch fünf

1) Journal de Liouville 1836, S 335.

2) Crelle's Journal Bd. 1, S. 369.

Stücke, ein Parallelogramm durch drei bestimmt ist. Die beiden Kräfte und der eingeschlossenen Winkel bestimmen die Resultante eindeutig. Diese könnte Diagonale in einem beliebigen Viereck sein. Da nur drei Stücke zur Auffindung der Resultierenden gegeben sind, so muß sie Diagonale des Parallelogrammes sein.

Burg schließt also daraus, daß die Resultante zweier Kräfte und die Diagonale des Parallelogramms durch drei Stücke bestimmt sind, daß beide identisch sind.

Beweis von Möbius.[1])

Möbius geht von dem Satz aus:

„Werden zwei von einer Ecke ausgehende Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms rechtwinklig projiziert, dann ist die Summe der Projektionen gleich der Projektion der Diagonale."

Dann nimmt er zum Beweise an, daß die Winkel der Diagonale mit den Seiten zu $\pi$ in einem rationalen Verhältnis stehen. Im Parallelogramm $ABCD$ werden durch $D$ unter gleichen Winkeln $m$ Gerade gezogen, $DC$ falle in eine derselben, dann fällt $DA$ in die $a^{\text{te}}$, $DB$ in die $b^{\text{te}}$ und es bestehen die Beziehungen:

$$\Sigma DA' + \Sigma DB' = \Sigma DC'$$
$$\alpha \quad + \quad \beta \quad = \gamma,$$

wobei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Resultanten der drei Systeme von Projektionen sind. Ist $\alpha$ gegeben, dann findet man durch Konstruktion $\beta$ und $\gamma$. Die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ werden sich wie $DA$, $DB$, $DC$ verhalten und ebenso werden die Richtungen entsprechend sein. Die Resultante $DC$ läßt sich aus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ finden, wenn die Winkel $BCD$ und $CDA$ zu $\pi$ in einem rationalen Verhältnis stehen. Bei irrationalem Winkelverhältnis wird $m$ so groß angenommen, daß rationale Verhältnisse gefunden werden können.

Beweis von Cauchy.[2])

Cauchy verwirft die früheren Beweise, welche sich auf Sätze der Infinitesimalrechnung, Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen und die Verlegung des Angriffspunktes der Kräfte stützen.

Er bedient sich in seinem Beweis der niederen Analysis und gründet ihn auf folgende Voraussetzung:

Ist $R$ die Resultante von $P$ und $Q$, dann ist sie es auch von $Px$ und $Qa$. Dabei kann $x = \frac{m}{n}$ rational oder irrational sein.

1) Crelle's Journal Bd. 42, S. 179.

2) Exercises de mathem. 1826, S. 29.

Für die Größe der Resultante zweier rechtwinkliger Kräfte findet er nach D. Bernoulli $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$, daraus leitet er für $P = Q$ ab: $R = P\sqrt{2}$.

Bei drei gleichen aufeinander senkrechten Kräften ist $R = P\sqrt{3}$. Die Zusammensetzung überträgt er auf die Projektionen und gelangt zu der Parallelogrammkonstruktion.

Im Fall ungleicher Kräfte ist:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\widehat{PQ}. \qquad \angle\widehat{PQ} = 2\vartheta$$
$$P = Q$$
$$\angle PR = \vartheta.$$

Gilt die Beziehung: $\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$ für $\angle\widehat{PR} = \tau$, dann gilt sie auch für $2\widehat{RP} = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi - \tau}{2}$. Die zwei Kräfte werden durch vier ersetzt, die übrigen fallen in die Richtung der Resultante und ergeben: $R = 2P\cos\widehat{PR}$.

Dann weist er nach, daß dies für $\widehat{PR} = \frac{\pi}{4}$ und allgemein für $\frac{2m+1}{2^n}\pi$ gilt, wobei dieser Winkel jedem beliebig nahe kommt.

Beweis von Raabe.[1])

Der Autor stellt die Kräfte in der komplexen Zahlenebene der durch:

$$X(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$Y(\sin\alpha - i\cos\alpha)$$

Nach Addition dieser Strecken ist:

$$R = X\cos\alpha + Y\sin\alpha$$
$$O = X\sin\alpha - Y\cos\alpha$$
$$R^2 = X^2 + Y^2.$$

Abgesehen davon, daß eine solche Darstellung der Kräfte unzweckmäßig ist, fehlt die Begründung, weshalb der Imaginärteil der Resultante = 0 sein soll. Außerdem beschränkt sich der Fall auf zwei rechtwinklig wirkende Kräfte. Durch Erweiterung auf drei zueinander senkrechte Kräfte findet er die Resultante im Raum.

Die dritte Art von Beweisen, welche sich um den von Duchayla gegebenen gruppiert, geht von zwei neuen Gesichtspunkten aus; es werden eingeführt:

1. das Prinzip der Superposition,
2. das Prinzip der Kraftverlegung.

1) Vierteljahrsschrift der Naturforschergesellschaft in Zürich 1856, S. 223.

Sonst gelten die übrigen Axiome, welche bei den vorigen Gruppen aufgestellt sind. Der oben angeführte Beweis von Duchayla ist bahnbrechend gewesen; er hat sich unter allen geometrischen bis in die Neuzeit erhalten und ist wegen seiner Kürze in vielen elementaren Lehrbüchern der Mechanik angeführt.

Bei der Bestimmung der Größe ist eine Methode von Kästner maßgebend gewesen. Beide genannten Beweise finden sich in veränderter Form bei Duhamel. Der Beweis von Matzka (cf. S. 26) lehnt sich stark an Duchayla an, wird aber unübersichtlich durch ein neu eingeführtes Koordinatensystem. Dies beseitigt Schlömilch[1]) in seinem Referat und gibt den Beweis in knapper Form. Der Beweis von Sturm (cf. S. 26) weicht von den vorigen nur in der Bestimmung der Richtung ab, indem er vom Gleichgewicht der Kräfte ausgeht.

Beweis von Duchayla.[2])

Die Resultante von $P$ und $Q$ sei $AD$, die von $P$ und $Q'$ sei $CJ$; für die Resultante von $P$ und $Q+Q'$ gilt dann:

$$P:Q:Q'=AB:AC:CH.$$

Die Resultante $AD$ wird nach $D$ gebracht und dort parallel $AB$ und $AC$ zerlegt, $Q'$ und $P$ werden nach $C$ verlegt; ihre Resultante wird nach $J$ gebracht. In $J$ wirken dann die Kräfte $P$, $Q+Q'$ wie in $A$. Die Resultante der in $J$ wirkenden Kräfte muß durch $A$ gehen, hat also die Richtung $AD$ (Fig. 10).

Kästner[3]) gibt folgende Methode zur Bestimmung der Größe der Resultante an: In $A$ wird $R$ angebracht, welche $P$ und $Q$ das Gleichgewicht hält, dann muß auch $Q$ der Resultante von $P$ und $R$ entgegengesetzt gleich sein. Durch $P$ werde die Parallele zu $AX$ gezogen, die $QA$ in $B$ trifft und durch $B$ die Parallele zu $PA$, welche $AX$ in $C$ trifft, dann ist $AC$ gleich $R$ und da $AC=BP=AS$, so ist $AS$ die Resultante von $P$ und $Q$ (Fig. 11).

Beweis von Duhamel.[4])

Duhamel geht von zwei in $A$ angreifenden kommensurablen Kräften aus, welche im Verhältnis $P:Q=m:n$ stehen. Die Kräfte $AM$ und $AN$ werden in $m$ und $n$ gleiche Teile geteilt, zu ihnen durch die Teilpunkte Parallele gezogen, so daß der Rhombus $AMND$ in

1) Ztschr. für Math. u. Phys. I, 1856.

2) Corresp. de l'école polytechn., Paris Nr. 4, 1808.

3) Kästner, Anfangsgründe d. angew. Mathem., S. 26. Göttingen 1759.

4) Duhamel, Lehrbuch d. analyt. Mechanik I, S. 10. Paris 1845. Deutsch von Schlömilch. Leipzig 1861.

$m \cdot n$ Rhomben geteilt ist. Die an den einzelnen Rhomben wirkenden Kräfte $\frac{P}{m}$ und $\frac{Q}{n}$ lassen sich alle nach $J$ verlegen, so daß dort die Kräfte $n\frac{Q}{n}$ und $m \cdot \frac{P}{m}$ wirken. Man würde daher in $J$ eine der ersten parallele Resultante erhalten. $J$ fällt also in die Richtung der Resultierenden und damit ist diese bestimmt.

Im Fall inkommensurabler Kräfte nimmt er nicht $AJ$ sondern $AH$ als Resultante an; es lassen sich dann stets $AB$ und $AN$ so finden, daß sie kommensurabel sind und eine Resultante $AC$ haben. Die Kräfte $AB+BM$ und $AN$, d. h. $AC$ und $MB$ würden nach unserer Annahme $AH$ als Resultierende ergeben. Das ist aber nicht möglich, da $AH$ außerhalb des Winkels $MAC$ fällt (Fig. 11).

Beweis von Matzka.[1])

Dieser hält die Mitte zwischen geometrischen und analytischen Beweisen. Er lehnt sich im Prinzip der Kraftverlegung an Duchayla und Duhamel an und gelangt zu einem einer Funktionalgleichung ähnlichen Ausdruck. Das einzig wesentlich Neue im Beweise ist die Einführung von Parallelkoordinaten, um einen zweiten Punkt auf der Resultante zu bestimmen. Das Referat von Schlömilch zeigt aber, daß dies nicht unbedingt nötig ist, der Beweis vielmehr ohne das Koordinatensystem viel einfacher wird.

Zu den beiden gegebenen Kräften wird eine dritte $Q'$ angenommen. Die Kräfte werden in bestimmter Richtung verlegt und es kommt darauf an zu zeigen, daß $y = MS = Q$ ist.

Durch Verlegung der Kräfte erhält er die Beziehungen:

Geht $Q$ in $Q+Q'$ über, dann wird auch $y$ zu $y+y'$; das wird folgendermaßen analytisch ausgesprochen:

Ist $y = F(Q)$, dann ist:

$$F(Q+Q') = F(Q) + F(Q').$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$y = F(Q) = \mu Q \qquad \mu = 1$$
$$y = Q.$$

Beweis von Sturm.[2])

Sturm bestimmt die Größe der Resultante nach Kästner; zur Auffindung der Richtung bringt er an einem Rhombus an den entgegen-

1) Abhandl. d. Kgl. Böhm. Ges. d. Wiss., V. Folge, Bd. 9. 1849.

2) Cours de mécanique I, 3. Paris 1861.

gesetzten Ecken vier gleiche paarweise entgegengesetzte Kräfte an, welche sich das Gleichgewicht halten. Das Viereck wird in $m \cdot n$ Rhomben zerlegt, an deren Ecken stets die Kräfte $J$ wirken, so daß sie im Gleichgewicht sind. Die dadurch entstehenden gleichen und entgegengesetzt wirkenden Kräfte heben sich auf; es bleiben nur $m$ Kräfte $J$ und $n$ Kräfte $J = P$ und $Q$ übrig, welche in $D$ wirken. Die Resultante ist dann durch die Punkte $A$ und $D$ bestimmt.

Beweis von Délègue.[1])

Im Anschluß an Bernoulli benutzt Délègue die Winkelteilung und bestimmt nach ihm die Größe der Resultante; von Duchayla entnimmt er das Prinzip der Kraftverlegung und überträgt nach Cauchy und Möbius die Eigenschaften der Kräfte auf ihre Projektionen. Er verwirft die analytischen Beweise, welche sich auf Taylorsche Reihenentwicklungen stützen und desgleichen die Beweise von Cauchy und Aimé, weil sie räumliche Betrachtungen gebrauchen und das zu erweisende Theorem einfacher durch die Geometrie der Ebene gelöst werden kann. Er gebraucht alle Axiome der früheren Beweise (Fig. 13).

Zur Bestimmung der Richtung zieht er auf den unbegrenzten Geraden $H$ und $H'$ $QR = AQ$, $RR' = AR$, $R'R'' = AR'$ und die Diagonalen, welche die Winkel $PAQ$, $PAR$, $PAQ'$ .... halbieren. Die Diagonale $AR$ ist die Resultante von $AQ$ und $AP$, da diese gleich sind. Für die anderen Strecken weist er es nach durch Kraftverlegung ($AR'$, $AR''$ ....).

Im allgemeinen Fall sei $AS$ Winkelhalbierende von $RAR' = R'AP$. Er konstruiert das Viereck $AM'SM \sim AR'R''K$ und $SS'$ senkrecht zu $AP$. Dann ist $AS$ den Kräften $AM$, $AM'$ äquivalent, diese den Kräften $AQ$, $AS'$; denn die Projektionen von $AS$ auf $AP$ und $AQ$ sind gleich der Summe der Projektionen von $AM$ und $AM'$. Da nun jede Kraft in zwei zueinander senkrechte zerlegt werden kann, so ist $AS$ Resultante von $AS'$ und $AQ$.

### 2. Die analytischen Beweise.

Alle Axiome, auf welche sich die geometrischen Beweise stützen, gelten auch bei den analytischen Beweisen mit Ausnahme des Prinzipes der Kraftverlegung. Dazu kommen zwei neue Axiome hinzu, für die keine Beweisversuche existieren.

1. Wenn man den Winkel $x$ einer Seitenkraft und der Resultante als eine Funktion der Strecke darstellt, welche diese Kräfte einschließen,

1) Nouvelles annales de math., 1873, S. 495.

so bleibt dieser Winkel doch derselbe, wenn man die Einheit oder das Maß, in welchem $P$ und $R$ genommen sind, ändert. Setzt man $P = \varphi(R, x)$ so ist nach dem Prinzip der Homogenität:

$$P = R\varphi(x)$$

d. h. der Winkel bleibt derselbe, wenn sich das Verhältnis $P:Q$ ändert; das gleiche fände aber auch statt, wenn: $x = F\left(\frac{P}{g}, \frac{Q}{g}\right)$ ist, also das Verhältnis noch von einer dritten Kraft abhinge. Ein Beweis, daß eine derartige Kraft nicht existiert wird, nirgends gegeben.[1])

2. Die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte ist gleich gültig; man bekommt immer wieder dieselbe Resultante. Dieser Satz ist wichtig, da auf ihm die Aufstellung der Funktionalgleichung beruht. In allen analytischen Beweisen des Parallelogramms der Kräfte ist der Gang bis zur Aufstellung der Funktionalgleichung ähnlich. Durch Zerlegung der Seitenkräfte in Komponenten und wechselnde Zusammensetzung derselben gelangt man stets zu der gleichen Resultante und erhält dadurch eine Funktionalgleichung, aus der dann $\varphi(x)$ und damit die Richtung der Resultante bestimmt werden kann. Dies geschieht nach den Gesetzen der höheren Analysis durch Reihenentwicklungen und trigonometrische Funktionen. Die meisten Beweise sind, wie es in der Natur der Sache liegt, nicht frei von Infinitesimalbetrachtungen und Annäherungsmethoden, welche den Beweisen ihre Strenge nehmen. Sie führen nämlich unendlich kleine Kräfte ein und gelangen mittels unendlicher Reihen zur Resultante. Irrationalitäten werden ebenso wie bei den geometrischen Beweisen durch Einschließung in enge Grenzen beseitigt.

Für den Wert eines Beweises ist des weiteren die korrekte Auflösung der Funktionalgleichung ausschlaggebend. Die allgemein befolgte Methode besteht in der Induktion, insofern für $\varphi(x)$ spezielle Werte ermittelt werden und dann verallgemeinert wird. Fast alle Autoren gehen von zwei gleichen unter einem beliebigen Winkel oder von zwei ungleichen unter einem rechten Winkel wirkenden Kräften aus.

Statt dieser gewöhnlichen Einteilung der Beweise[2]) wollen wir eine andere wählen und zwar wollen wir die Beweise nach drei Ideen gruppieren, welche sich in ihnen finden.

Die erste Gruppe von Beweisen lehnt sich an den Beweis von Foncenex an, welcher von D'Alembert verbessert worden ist und

1) Schlömilch, Ztschrft. für Math., 1857.

2) Westphahl, Die Beweise des Parallg. d. Kr., Dissert., Göttingen 1867, und Schlömilch, Ztschr. f. Math., 1857.

bei Poisson eine mustergültige Darstellung erhalten hat. In späterer Zeit haben Schlömilch, Boltzmann und andere Autoren Verbesserungen gegeben, welche sich hauptsächlich auf die Auflösung der Funktionalgleichung beziehen. Das Charakteristische an dieser Gruppe ist, daß alle Autoren auf dieselbe Funktionalgleichung stoßen.

Die zweite Gruppe leitet der Beweis von Venini ein, der von D'Alembert verbessert worden ist. Beide ziehen die Funktionen tangens und arcus tangens heran. Die Grundgedanken dieser Beweise scheint später Schlömilch wieder aufgenommen zu haben, denn er gelangt zu einer ähnlichen Funktionalgleichung, für die er eine elegante Lösung gibt. Die Schlömilchsche Abhandlung ist eine Zusammenfassung und Kritik der früheren analytischen Beweise des Parallelogramms der Kräfte, welche der Verfasser dann ausgebaut und vervollkommnet hat.

Die dritte Gruppe geht ebenso wie die zweite von zwei rechtwinklig wirkenden Kräften aus und lehnt sich an einen Beweis von Laplace an. Dieser gibt eine neue Art der Größenbestimmung der Resultante, welche stark an D. Bernoulli erinnert, nur daß hier die höhere Analysis angewandt wird. Die Beweise stützen sich mehr als andere auf Infinitesimalbetrachtungen, bringen aber bei der Bestimmung der Richtung fast durchweg neue Gedanken.

### 1. Gruppe.

Beweis von Foncenex.[1])

Für die Resultante findet Foncenex den Ausdruck:

$$\lambda = a F(\varphi) = a y.$$

Zu ihrer Bestimmung werden $Ca'$, $Cb'$, $Ca$, $Cb$ als Seitenkräfte so gezogen, daß $\angle mCM = \angle ACa = \ldots = \frac{d\varphi}{2}$ wird (Fig. 14).

Dann gehört zu $\angle ACB$ der Wert $y$,

$\angle acb$ „ „ $y + dy$,

$\angle a'cb'$ „ „ $y + 2dy + d^2y = y''$.

Durch Zusammensetzung der Kräfte erhält er:

1. eine Resultante $a(y + y'')$,
2. „ „ $ay'(2 + Vd\varphi)$ $\qquad Vd\varphi = dy$

und daraus die Funktionalgleichung:

$$y'(2 + Vd\varphi) = y + y''$$

$$d^2y = y H d\varphi^2$$

$$y = Ae^{\varphi\sqrt{H}} + Be^{-\varphi\sqrt{H}}$$

1) Mélanges de philosophie, Turin 1760—1761, S. 305.

Durch Spezialisierung der Konstanten ergibt sich:

$$y = \cos\frac{\varphi}{2}.$$

Dieser Beweis hat aber dem Verfasser selbst nicht genügt wegen des Auftretens der unendlich kleinen Größen, und er hat einen zweiten Beweis gegeben, der davon frei ist, sich aber nicht auf das Stetigkeitsprinzip stützt.

Die Konstruktionen sind dieselben wie im vorigen Beweis. Die Resultante, welche zum Winkel $mCm'$ gehört, ist $p_a$ und für den Winkel

$$ACB = p_n a$$
$$acb = p_{n+1} a$$
$$a'Cb' = p_{n+2} a$$

wobei die Indices $n$, $n+1$, $n+2$ bedeuten, daß die Resultanten zu den Winkeln $n(mCm')$, $(n+1)(mCm')$, $(n+2)\,mCm'$ gehören.

Die Zusammensetzung der Kräfte ergibt dann die Gleichung:

$$p_n + p_{n+2} = k p_{n+1}$$
$$p_n = Dx^n + Ey^n = F\cos n\alpha + G\sin n\alpha$$
für $F=2$, $G=2$
$$p_n = 2\cos n\alpha \qquad \text{für } n\alpha = 180^\circ,\ p_n = 0$$
$$\nu\alpha = \frac{\pi}{4},\quad \alpha = \frac{\pi}{4\nu}$$
$$p_n = 2\cos\frac{n\alpha}{4\nu}, \qquad \text{dabei kann } \frac{n}{4\nu}\pi \text{ jedem Winkel beliebig nahe kommen.}$$

Beweis von D'Alembert.[1])

D'Alembert stößt auf dieselbe Funktionalgleichung wie Foncenex, gibt aber eine strengere Ableitung[2]), welche nicht frei von Infinitesimalbetrachtungen ist. Er vermeidet jedoch, ein Fortschritt gegen Foncenex, die unendlich kleinen Größen vor Aufstellung der Funktionalgleichung. Er gelangt zu den Gleichungen:

1. $a\varphi(m) + b\varphi(\alpha + m) = x\cdot\varphi(u+m)$
2. $x\cdot\varphi(u) + b\varphi(\alpha + 2m') = 2a + b\varphi(m')\cdot\varphi(\alpha + m')$

und erhält durch Spezialisierung:

$$\varphi(d - m') + \varphi(d + m') = \varphi(m')\cdot\varphi d' \qquad \alpha + m' = d$$
$$\varphi(d - m') = \varphi(\alpha) = e^{\alpha\sqrt{A}} + e^{-\alpha\sqrt{A}} = 2\cos\alpha$$

1) Mémoires de l'acad. des sciences de Paris, 1769, pag. 278.
2) Histoire de l'acad. de Berlin, 1750, pag. 355.

Die D'Alembertsche Funktionalgleichung findet sich in veränderter Form in dem Beweis von Poisson.[1])

Poisson hat zwei Beweise gegeben, in den Jahren 1811 und 1833. Der zweite ist lediglich eine Verbesserung des ersten, da ihm die Auflösung der Funktionalgleichung durch Reihenentwicklung nicht genügt hat. Er gibt aber auch im zweiten Beweis keine strenge Ableitung, sondern läßt nur die Reihenentwicklung fort und begnügt sich mit der Annahme, daß $F(x) = 2\cos(ax)$ die Gleichung befriedigt. Der Beweis übertrifft an Einfachheit die vorherigen und lehnt sich in der Auffassung der Funktionalgleichung an D'Alembert an.

Die Funktionalgleichung lautet:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z).$$

Im ersten Beweis entwickelt Poisson $\varphi(x+z)$ und $\varphi(x-z)$ in Reihen, welche der Kosinusreihe gleichgesetzt werden.

Diese Entwickelbarkeit von $\varphi(x+z)$ und $\varphi(x-z)$ ist willkürlich angenommen und muß erst bewiesen werden.

Im zweiten Beweis gibt Poisson nur an, daß der Gleichung der Wert $\varphi x = 2\cos ax$ genügt unter der Voraussetzung, daß:

$$\varphi(z) = 2\cos az$$
$$\varphi(x+z) = 2\cos a(x+z)$$
$$\varphi(x-z) = 2\cos a(x-z).$$

Also: $2\cos az \cdot \cos ax = \cos a(x+z) + \cos a(x-z)$.

Gilt diese Gleichung für einen bestimmten Wert von $\alpha$, $\varphi(\alpha) = 2\cos\alpha$, dann gilt sie auch für $x = 3\alpha,\ 4\alpha \ldots . \frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha$ und allgemein für $x = \frac{m}{2^n}\alpha$.

Eine Reihe Autoren hat es unternommen diesen Poissonschen Beweis, d. h. seine Auflösung der Funktionalgleichung zu verbessern. Es sind dies die Arbeiten von Dippe, Navier, Schlömilch und Boltzmann.

Beweis von Dippe.[2])

Dippe stellt dieselbe Funktionalgleichung auf:

$$2\varphi(x) \cdot \varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

und schließt dann so, da:

$$P + P > R > P - P$$

folgt:

$$0 \angle \varphi(x) \angle 1.$$

1) Traité de mécanique, 1811 und 1833, S. 11.

2) Grunerts Archiv, 1843, Teil III, S. 329.

Also ist $\varphi(x)$ gleich dem Kosinus eines Winkels.

Durch Spezialisierung erhält man:

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\varphi(\alpha)}{2}}.$$

Ist $\varphi\alpha = \cos\alpha$, dann ist auch: $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \cos\frac{\alpha}{4}$$

und allgemein: $$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$$

Da dieser Wert jedem Winkel nahe kommt, so gilt allgemein:

$$\varphi(x) = \cos x.$$

Im Vergleich zum Poissonschen Beweis ist der von Dippe elementar gehalten.

Beweis von Navier.[1])

Der Naviersche Beweis geht nicht über die Darstellung von Poisson aus dem Jahre 1811 hinaus. Nach Aufstellung der Gleichung:

$$Fx \cdot Fy = F(x+y) + F(x-y)$$

bestimmt Navier durch Differentiation und Annahme spezieller Werte von $y$ die Koeffizienten einer MacLaurinschen Reihe, welchen folgende Ausdrücke genügen:

$$F(x) = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = 2\cos\lambda x.$$

Da der erste Wert ausgeschlossen ist, so ist:

$$R = 2P\cos x \qquad \lambda = 1.$$

Der Beweis hat ebenso wie der von Poisson die Schwäche, daß die Möglichkeit der Entwicklung nach MacLaurin nicht erwiesen ist. Neu ist dagegen die Bestimmung von $F(x)$ durch Verwerfung der Exponentialfunktion.

Eine elegante Auflösung der Funktionalgleichung ist enthalten im:

Beweis von Schlömilch.[2])

Die Gleichung:

$$F(\eta + 2d) + F(\eta) = F(d) \cdot F(\eta + d)$$

formt Schlömilch um zu:

---

1) Navier, Lehrbuch der höheren Mechanik, Paris 1841, § 15. Deutsch von Mejer. Hannover 1858.

2) Zeitschrft. f. Math. u. Phys., 1857, II, p. 85.

$$\frac{F(\eta+2d)-2F(\eta+d)+F(\eta)}{d^2}=\frac{F(d)-2}{d^2}=F(\eta+d)$$

$\lim d=0$ $\quad F''(\eta)=\frac{0}{0}F(\eta)$ $\quad \frac{0}{0}$ ist eine von $\eta$ unabhängige Konstante.

$$F''(\eta)=kF(\eta).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $F\eta=\cos\eta$.

Beweis von Boltzmann.[1])

Boltzmann führt den Beweis wie Poisson, ändert aber die Auflösung der Funktionalgleichung ähnlich wie Navier durch Verwerfung der Exponentialfunktion.

Für einen sehr kleinen Winkel $\varepsilon$ ist:

$$F(\varepsilon)=e^{\zeta}+e^{-\zeta} \quad \text{wenn} \quad F(\varepsilon)>2$$
$$F(\varepsilon)=-\left(e^{\zeta}+e^{-\zeta}\right) \quad „ \quad F(\varepsilon)<-2$$
$$F(\varepsilon)=2\cos\zeta \quad „ \quad 2>F\varepsilon>-2 \quad \text{ist.}$$

Ist $F(\varepsilon)=\pm 2$, dann muß $\zeta=0$ sein.

Substituiert man in die Gleichung:

$$\alpha=\varepsilon,\quad \beta=\varepsilon,\qquad \alpha=\beta=2\varepsilon,$$
$$\alpha=\varepsilon,\quad \beta=2\varepsilon,\qquad \alpha=\beta=4\varepsilon,$$
$$\cdots\quad\cdots\qquad\cdots\quad\cdots$$

dann ist für eine beliebige Zahl $h$:

$$F(h\varepsilon)=e^{h\zeta}+e^{-h\zeta} \text{ oder } =(-1)^h\left(e^{h\zeta}+e^{-h\zeta}\right) \text{ oder } =2\cos h\zeta.$$

Boltzmann zeigt dann, daß $F(h\varepsilon)$ nicht durch eine Exponentialfunktion ausgedrückt werden kann und daß $\zeta=\varepsilon$ ist.

Also ist: $\quad F(h\varepsilon)=2\cos(h\varepsilon)$

$$F(\alpha)=2\cos\alpha.$$

## Zweite Gruppe.

Diese Beweise sind charakterisiert durch die Hinzuziehung von zyklometrischen Funktionen; sie gehen von zwei rechtwinklig aufeinander wirkenden Kräften aus. Der erste dieser Art ist der

Beweis von Venini.[2])

Die auf $D$ wirkenden Kräfte werden zerlegt in die vier Kräfte: $DO$, $DH$, $DT$, $Dc$ und wieder zu den Resultanten vereinigt: [Fig. 15].

$$DE=DT+Dc=\frac{P+Q}{\sqrt{2}}$$
$$DF=DO-DH=\frac{P-Q}{\sqrt{2}}.$$

1) Boltzmann, Die Prinzipien der Mechanik, S. 31, 1897.

2) Journal des Savants, 1764, S. 419.

Die Wirkung nach $AD$ und $DC$ ist dieselbe wie nach $DF$ und $DE$, da man beidemale dieselbe Diagonale erhält. Die Lage der Resultante ist eine Funktion der Seitenkräfte, also:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (90 - \alpha)} = F(QP)$$

Es kann nun $F \gtrless \frac{Q}{P}$ sein.

Die beiden ersten Fälle werden ausgeschlossen und es ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}.$$

Venini schließt daraus:

Ist in einem Falle $F \gtrless \frac{Q}{P}$, dann gilt diese Ungleichung auch immer.

D' Alembert verwirft diesen Beweis und gibt im Anschluß an Venini einen neuen Beweis.

Zweiter Beweis von D'Alembert.[1])

Wie Venini kommt D'Alembert auf die Gleichung:

$$\frac{\sin x}{\sin (90 - x)} = \operatorname{tg}(x) = \varphi(z) \qquad z = \frac{b}{a}.$$

Nach $AC$ und $AO$ denken wir uns die Kräfte $na$ und $nb$ wirkend. $AR$ ist die Resultante von $a - nb$ und $b + na$, $\angle DAR = x'$.

$$\operatorname{tg}(x + x') = \varphi\left(\frac{b + na}{a - nb}\right) = \varphi\left(\frac{\frac{b}{a} + n}{1 - n\frac{b}{a}}\right) = \varphi\left(\frac{z + n}{1 - nz}\right).$$

Daraus: $$\operatorname{tg}(x') = \frac{\varphi\left(\frac{z + n}{1 - nz}\right) - \varphi(z)}{1 + \varphi(z) \cdot \varphi\left(\frac{z + n}{1 - nz}\right)}.$$

Durch Zusammensetzung von $AD$ und $AQ$ erhält er:

$$\operatorname{tg}(x') = \varphi\left(\frac{ny}{y}\right) = \varphi(n)$$

$$\varphi(n) = \frac{\varphi\left(\frac{z + n}{1 - nz}\right) - \varphi(z)}{1 + \varphi(z) \cdot \varphi\left(\frac{z + n}{1 - nz}\right)}.$$

1) D'Alembert, Opusc. math. Tome VI, S. 360. Paris 1773.

Die Auflösung ergibt:

$$\operatorname{arctg} \varphi(x) = \operatorname{arctg}(ax)$$

$$\varphi(x) = x = \operatorname{tg} x = \frac{b}{a}.$$

Zu einer ähnlichen Lösung der Funktionalgleichung, allerdings auf anderem Wege, gelangt Schlömilch.[1]) Dieser Beweis ist eine Umkehrung des auf S. 33 gegebenen, insofern als hier $\eta$ und $\eta_1$ explizite dargestellt werden.

Schlömilch geht aus von:

$$\eta = F\left(\frac{Q}{P}\right), \quad \eta_1 = F\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)$$

wobei $P_1$ und $Q_1$ nach denselben Richtungen wie $P$ und $Q$ wirken und die Bedingung erfüllt ist:

$$P^2 + Q^2 = P_1^2 + Q_1^2.$$

Werden erstens die Resultanten $R$ und $R'$, zweitens die vier Kräfte zusammengesetzt, dann erhält man die Beziehung:

$$\varphi\left(\frac{Q+Q_1}{P+P_1}\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{Q}{P}\right) + \varphi\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)\right].$$

Daraus folgt die Funktionalgleichung:

$$\varphi(x) + \varphi(x+2d) = 2\varphi(x+\varepsilon) \qquad x = \frac{Q}{P}.$$

Dieses wird umgeformt zu:

$$\varphi''(x) = -\frac{2x}{1+x^2}\varphi'(x)$$

$$\eta = a + b \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$$

$$\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \eta.$$

Im Anschluß an diesen Beweis schlägt Schlömilch den umgekehrten Weg ein, indem er setzt:

$$\frac{Q}{P} = F(\eta), \qquad \frac{Q_1}{P_1} = F(\eta_1).$$

Dann ist:

$$\frac{Q+Q_1}{P+P_1} = \frac{F(\eta+\eta_1)}{2}.$$

$$\frac{F(\eta_1) - F\left(\frac{\eta+\eta_1}{2}\right)}{F\left(\frac{\eta+\eta_1}{2}\right) - F(\eta)} = \sqrt{\frac{1+F(\eta_1)^2}{1+F(\eta)^2}}.$$

1) Ztschrft. für Math. II., 1857.

Durch Umformung ergibt sich:

$$\frac{F''(\eta)}{F'(\eta)} = \frac{2F(\eta)}{1+F(\eta^2)} F'(\eta).$$

Die Integration führt zu demselben Resultat wie oben.

### Dritte Gruppe.

Diese Gruppe schließt sich an einen von Laplace gegebenen Beweis an, dessen Größenbestimmung der Resultante von den betreffenden Autoren aufgenommen wird; nur die Richtung der Resultante wird in den meisten Beweisen auf anderem Wege gefunden. Alle Beweise gehen von rechtwinklig wirkenden Kräften aus.

Beweis von Laplace.[1])

Die Resultante sei $z$, der Winkel $\widehat{xz} = \vartheta$. Die Kräfte werden unendlich klein, als Differentiale angenommen.

Es ist:

$$x = F(\vartheta)z$$

$$y = F\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)z.$$

Bei der Bestimmung der Größe der Resultante wird zerlegt:

$$x \text{ in } x' = xF(\vartheta) \qquad = \frac{x^2}{z}$$

$$x'' = xF\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \qquad = \frac{xy}{z}$$

$$y \text{ in } y' = \frac{y^2}{z}$$

$$y'' = \frac{xy}{z}.$$

Also $z^2 = x^2 + y^2$, da sich $x''$ und $y''$ aufheben.

Die Richtung wird folgendermaßen gefunden:

Wächst $x$ um $dx$, so nimmt $\vartheta$ um $d\vartheta$ ab; $dx$ wird zerlegt in $dx'$ und $dx''$. Dann ist $z'$ die Resultante von $z + dx'$ und $dx''$. Da $\angle \widehat{zdx''} = \frac{\pi}{2} - d\vartheta$ ist, so ist: $dx'' = z' F\left(\frac{\pi}{2} - d\vartheta\right)$.

Da $F\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ unendlich klein wird, so kann man dafür schreiben $-kd\vartheta$.

Also:

$$\frac{dx''}{z'} = -kd\vartheta.$$

$$d\vartheta = -\frac{ydx}{kz^2}.$$

1) Laplace, Mécanique céleste, Vol. I, 1799, S. 14.

Läßt man sich $y$ analog ändern, dann ist:

$$d\vartheta = \frac{x\,dy}{k z^2}.$$

Ändern sich $x$ und $y$ zugleich, dann ist:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{k z^2} = k\,d\vartheta.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(k\vartheta + \varrho)$$

$$x = z\cos(k\vartheta + \varrho)$$

und für $k = 1$, $\varrho = 0$ ist: $x = z\cos\vartheta$.

Beweis von Burg.[1])

Die Kräfte $P = R\varphi(x)$

$Q = R\varphi(x')$

werden zerlegt in: $p' = P\varphi(y)$ $\quad p = P\varphi(y')$

$q' = Q\varphi(y')$ $\quad q = Q\varphi(y)$.

Setzt man: $y = \frac{\pi}{2} - x = x'$

$$y' = \frac{\pi}{2} - y = x,$$

dann ergeben sich aus den vier Kräften die Resultanten:

$$p' - q' = R\,\varphi(x + y)$$

$$p' + q' = R\,\varphi\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right)$$

und daraus die Funktionalgleichung:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\,\varphi(y) - \varphi_1(x)\,\varphi_1(y)$$

$$\varphi_1(x + y) = \varphi(x)\,\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\cdot\varphi(y).$$

Durch Grenzbetrachtungen zeigt er, daß für jeden reellen Wert von $x$: $\frac{a}{x}$ zwischen $R$ und $P$ liegt und:

$$\lim_{x=0} \frac{\varphi_1(x)}{x} = 1 \quad \text{ist.}$$

$\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ lassen sich in Reihen entwickeln; nach Bestimmung der Koeffizienten erhalten wir die Reihen als Kosinus- und Sinusreihe. Es ist also:

$$P = R\cos x$$

$$Q = R\sin x.$$

Die Möglichkeit einer Entwicklung von $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ müßte aber erst bewiesen werden.

---

1) Burg, Compendium der höheren Mechanik. Supplementbd. 1863, S. 1.

Beweis von Pontéculant.[1])

Die Größe der Resultante wird nach Laplace gefunden. Zur Bestimmung der Richtung führt Pontéculant räumliche Betrachtungen ein, indem er zu den beiden senkrecht wirkenden Kräften noch eine dritte auf ihnen senkrechte einführt ($z$).

Er gelangt zu der Funktionalgleichung:

$$1.\quad \varphi(z) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Es besteht nun die Relation:

$$2.\quad \cos z = \cos x \cdot \cos y.$$

Die erste Gleichung wird nach $x$ und $y$ differenziert; die Ableitungen nach $x$ und $y$ aus 2) dort eingesetzt. Das gibt:

$$\frac{\cos x \cdot \varphi'(x)}{\sin x \cdot \varphi(x)} = \frac{\cos y\, \varphi'(y)}{\sin y \cdot \varphi(y)}.$$

Da $x$ und $y$ unabhängig sind, so bleibt jedes Glied konstant, also ist:

$$\frac{\cos x \varphi'(x)}{\sin x \varphi(x)} = c$$

$$\varphi(x) = C(\cos x)^{-c}$$

Die Konstanten werden so bestimmt, daß $C = 1$, $c = -1$ ist. Also ist:

$$X = R \cos x.$$

An alle drei Gruppen lehnt sich ein Beweis von Lehmann-Filhés.[2])

Die Größe wird nach Laplace bestimmt; zur Auffindung der Richtung wählt Lehmann-Filhés den von D'Alembert eingeschlagenen Weg, indem er zu den Kräften $P$ und $Q$ die $n$-fachen $nP$ und $nQ$ einführt, und gelangt zu der Poissonschen Funktionalgleichung:

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta).$$

Die Auflösung dieser Gleichung ist elementar gehalten und frei von Infinitesimalbetrachtungen.

In keine der drei Gruppen läßt sich folgender Beweis von G. Hearn[3]) einreihen. Der Autor vermeidet die übliche Zerlegung der Kräfte und geht vielmehr vom Gleichgewicht aus. Zur Auflösung der Funktionalgleichung wendet er Infinitesimalbetrachtungen an.

Die Projektion einer Kraft auf eine Gerade, welche mit ihr den Winkel $\vartheta$ bildet, ist $P \cdot F(\vartheta)$. Die Gleichgewichtsbedingungen für zwei Kräfte sind:

$$PF(\vartheta) + P \cdot F(\pi + \vartheta) = 0$$

und für drei in einer Ebene liegenden Kräfte:

$$PF(\vartheta) + QF(\alpha + \vartheta) + RF(\beta + \vartheta) = 0.$$

1) Théorie du système du monde, Paris 1829, S. 5—9.

2) Archiv f. Math. u. Phys., 1903, S. 124—128.

3) Phil. Magazines 29, S. 258, 1846.

Darin setzt er $\vartheta = 0$ und bestimmt nach zweimaliger Differentiation $\frac{Q}{P}$ und $\frac{R}{P}$ als Funktionen von $\alpha$ und $\beta$.

Durch passende Multiplikation mit gewissen Koeffizienten $\lambda$ und $\mu$ und Addition erhält er:

$$F''(\alpha) + \lambda F'(\alpha) + \mu F(\alpha) = 0$$
$$F''(\beta) + \lambda F'(\beta) + \mu F(\beta) = 0.$$

Da die Schlüsse von den einzelnen Winkeln unabhängig sind, so ist:

$$F''(\vartheta) + \lambda F'(\vartheta) + \mu F(\vartheta) = 0$$
$$F(\vartheta) = Ae^{a\vartheta} + Be^{-a\vartheta}.$$

Nach Bestimmung der Konstanten folgt:

$$F(\vartheta) = \cos n\vartheta \qquad n = 1$$
$$F(\vartheta) = \cos \vartheta.$$

Damit ist die Richtung bestimmt.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei ein Beweis von Schlömilch[1]) angeführt, der unter den analytischen und geometrischen Beweisen eine Zwischenstellung einnimmt. In der Anwendung der niederen Analysis ähnelt er dem von Cauchy gegebenen Beweise (cf. S. 23).

Die Resultante dreier aufeinander senkrecht wirkender Kräfte wird so bestimmt, daß:

$$\operatorname{tg}(X, \sqrt{Y^2 - Z^2}) = \operatorname{tg}(X, Y)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(Y, Z)}.$$

Sind alle drei Kräfte gleich, dann ist:

$$\operatorname{tg}(X, X\sqrt{2}) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 45^0} = \sqrt{2}.$$

Dann behält er zwei Kräfte als gleich, die dritte läßt er variieren.

$$\operatorname{tg}(X, X\sqrt{3}) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(X, X\sqrt{2})} = \sqrt{3}$$

und allgemein:

$$\operatorname{tg}(X, X\sqrt{n}) = n = \frac{Xn}{X}.$$

$$\operatorname{tg}(P, Qm) = \operatorname{tg}(P, Q) \cdot m.$$

$$\operatorname{tg}(P, Q) = \frac{\operatorname{tg}(P, Qm)}{m}.$$

Bei zwei Kräften, welche sich verhalten wie $m : n$ ist:

$$mQ = nP$$

$$\operatorname{tg}(P, Q) = \frac{\operatorname{tg}(P, Pn)}{m}.$$

Da aber $\operatorname{tg}(P, Pn) = n$ ist, so bleibt:

$$\operatorname{tg}(P, Q) = \frac{n}{m} = \frac{Q}{P}.$$

Damit ist die Lage der Resultante bestimmt.

1) Zeitschrft. f. Math. u. Phys., 1860, S. 435.

### 3. Beweise, welche auf Sätzen der Mechanik beruhen.

Diese Art der Beweise ist fast durchweg einfacher, setzt aber mehr voraus. Zu der Annahme der Kraftverlegung und Superposition kommt noch die Voraussetzung, daß die betreffenden Grundsätze der Mechanik sich streng beweisen lassen, und das ist nicht der Fall. Außerdem können die Beweise, welche sich auf das Prinzip des Hebels stützen, nicht gelten, da dieses ein Spezialfall der Kräftezusammensetzung ist und folglich ein Teil des zu Erweisenden vorausgenommen wird.

Zunächst seien die Beweise erwähnt, welche sich auf die Theorie des Hebels stützen. Dabei sind von den Autoren zwei Wege eingeschlagen worden, je nachdem sie vom Winkelhebel oder vom geradlinigen Hebel ausgehen. Die erste Idee ist älter; man findet sie schon bei La Hire angedeutet. Den ersten Beweis dieser Art hat Kästner[1]) (Fig. 16) gegeben; an ihn lehnt sich später der Beweis von Ide an. Kästner betrachtet den Winkelhebel $AOB$ und zieht $OD$ parallel $CB$ und $OE$ parallel $CA$, dann ist:

$$\angle\, CDA = ECD = OEB.$$

Also: $$AO : OB = OD : OE = CD : CE = P : Q.$$

Dadurch ist die Richtung der Resultante bestimmt.

Beweis von Ide.[2])

Die drei Kräfte $P$, $Q$, $R$ mögen sich das Gleichgewicht halten. Zieht man $CO = C\gamma$ und fällt die Lote $OA$, $OB$, dann ist (Fig. 16):

$$OA = OC \sin \psi$$
$$OB = OC \sin (\varphi - \psi).$$

Denkt man sich $AOB$ als Winkelhebel mit festem Drehpunkt $O$, dann herrscht Gleichgewicht, wenn:

$$P \cdot OA = Q \cdot OB.$$
$$P \sin \psi = Q \sin (\varphi - \psi). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Betrachtet man $P$ als Resultante von $R$ und $Q$, dann ist:

$$Q \sin \varphi = R \sin \psi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Umformung von (1) erhält man:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Q \sin \varphi}{P + Q \cos \varphi}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Damit ist die Richtung bestimmt.

Aus (2) und (3) folgt:

$$R \cos \psi = P + Q \cos \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

1) Kästner, Theoria vectis et compositio virium, Leipzig 1753, u. Anfangsgründe der angewandten Mathematik II, S. 25. Göttingen 1759.

2) Ide, System der Mechanik fester Körper I, S. 23. Berlin 1802.

Aus (2) und (4) $$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\varphi}.$$

Dem Kästnerschen Beweis gegenüber ist die Einführung trigonometrischer Funktionen und die Größenbestimmung neu.

Beweis von Navier.[1])

Auch Navier geht von der Annahme aus, daß sich drei Kräfte $P$, $Q$, $R$ das Gleichgewicht halten. Von einem Punkte der Verlängerung von $R$ werden die Lote $BA$ und $CA$ gefällt und $BAC$ als Hebel mit dem festen Punkte in $A$ angesehen. Der Hebel sei mit dem System fest verbunden. Dann wird das Gleichgewicht nicht gestört und $R$ kann fortgelassen werden, weil es durch den Widerstand des festen Punktes $A$ aufgehoben wird. Die beiden übrig bleibenden Kräfte halten sich in $A$ das Gleichgewicht; es ist:

$$BA : AC = Q : P,$$

d. h. $R$ ist als Diagonale des Parallelogramms bestimmt (Fig. 17).

Beweis von Crelle[2]) (Fig. 18).

Crelle zieht bei seinem Beweise den geradlinigen Hebel heran und benutzt dann den Satz:

„Am Hebel ist Gleichgewicht, wenn $ap = bq$ ist, wobei $a = AC$, $b = BC$ ist."

Die Kräfte werden nach dem Punkt $M$ verlegt, wo dann ihre Resultierende: $MM_3 = p + q$ ist. Ihr Schnittpunkt mit dem Hebel heißt dessen Ruhepunkt; er ergibt sich aus der Gleichung $ap = bq$. Durch $M$ ist die Richtung $MB$ der verlängerten Mittelkraft $BB_3$ als Diagonale im Parallelogramm $MM_4BM_2$ bestimmt.

Die Größe der Resultante findet Crelle folgendermaßen:

„Angenommen, $z$ sei nicht die Diagonale $BB_3$, sondern $z < BB_3$, $z = BN$. Dann müßte $BN_1$ in entgegengesetzter Richtung den beiden Kräften $p$ und $q$ das Gleichgewicht halten. Diese Gerade fällt in die Diagonale des Parallelogrammes aus den beiden Seitenkräften, in die Richtung $BN_2$. Da diese nicht die Verlängerung von $BB_1$ ist, so kann $z$ nicht $< BB_3$ sein. Analog weist er nach, daß $z$ nicht $> BB_3$ sein kann. Also ist $z = BB_3$.

Beweis von Lambert.[3])

Mit diesen Beweisen ist ein von Lambert gegebener verwandt, der sich auf folgenden statischen Satz stützt:

---

1) Navier, Lehrbuch d. höheren Mechanik, S. 12, Paris 1841. Deutsch von Mejer, Hannover 1858.

2) Crelle, Journal, Bd. 44. 1852.

3) Lambert, Beyträge zum Gebrauch d. Math., 1770, II, § 468.

„Wirken drei Kräfte $P$, $Q$, $R$ auf einen Punkt und wird dieser im Gleichgewicht gehalten, dann ist:

$$P \cdot PC + Q \cdot QC + R \cdot RC \text{ ein Minimum.}“$$

Auf eine durch $Q$ gezogene Linie werden $P$, $C$ und $R$ projiziert, so daß: $Q \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + P\sqrt{(b-y)^2 + (x-a)^2} + R\sqrt{(y-a)^2 + (c-x)^2}$.
Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn man ihn nach $x$ und $y$ differenziert und gleich Null setzt.

Die dabei auftretenden Brüche, mit denen $P$, $Q$, $R$ multipliziert sind, werden Cosinus und Sinus von Winkeln gleichgesetzt.

Werden dann die Lote von $p$, $q$, $r$ auf $kCh$ gefällt, dann ergibt sich: $$o = qm - pn + rh$$
und für das Parallelogramm $qCpg$:
$$kC = Ch$$
$$gk = rh.$$
Daraus folgt die Diagonale $Cg = CR$ als Resultante.

Dieser Beweis wird von Lambert selbst verworfen, weil er „mehr zeigt, daß die Sache sei als wie sie sei.“

Die drei jetzt folgenden Beweise von Redtenbacher, Zernikow und Ritter beruhen auf anderen Prinzipien der Mechanik, wie auf dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, dem der lebendigen Kraft und dem des kleinsten Zwanges.

Beweis von Redtenbacher.[1])

Der Autor gründet seinen Beweis auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und benutzt hauptsächlich das Prinzip der Verlegung des Angriffspunktes.

Die Gleichgewichtsbedingungen dreier Kräfte werden nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen abgeleitet.

Es sei $\angle O_3OX = \varphi$.

Der Angriffspunkt $O$ wird dreimal verschoben:

1. in der Richtung $OX$, dann ist:
$$O = X \cdot \overline{OO_1} - R\,\overline{OO_1}\cos\varphi$$
$$X = R\cos\varphi,$$
2. in der Richtung $OY$, dann ist:
$$Y = R\sin\varphi,$$
3. in der Richtung $OO_3$, dann ist:
$$R = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$$
$$R^2 = X^2 + Y^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X}.$$

1) Redtenbacher, Prinzipien der Mechanik, S. 155. 1859.

Der Beweis wird von Redtenbacher nur für rechtwinklig zu einander wirkende Kräfte durchgeführt.

Beweis von Zernikow.[1])

Dieser Beweis beruht auf dem Prinzip der lebendigen Kraft. Jeder Körper von der Masse $m$, der sich mit der Geschwindigkeit $g$ bewegt, besitzt eine Kraftquantität $\frac{m}{2} g^2$. Bewegt sich ein Körper längs der Linie $AB$ und wirkt auf ihn eine Kraft unter dem Winkel $\alpha$, dann wird nur ein Teil der Kraft zur Bewegung beitragen. Die Kraft zerfällt in zwei senkrechte Komponenten:

$$\frac{mg^2}{2} = \frac{mg'^2}{2} + \frac{mg''^2}{2}.$$

Die Geschwindigkeiten $g'$ und $g''$ hängen von den Winkeln $\alpha$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ab und es ist:

$$\frac{mg^2}{2} = \frac{mg^2}{2} F(\alpha)^2 + \frac{mg^2}{2} F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2.$$

Dieser Gleichung genügen die Werte $F(\alpha) = \cos\alpha$ und

$$F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \cos\beta.$$

Man hat also:

$$g' = g\cos\alpha,$$
$$g'' = g\cos\beta.$$

Zu denselben Werten der Komponenten gelangt Zernikow auch durch Entwicklung von $F(\alpha)$ nach Mac-Laurin und Einführung von Spezialwerten.

Beide Betrachtungen sind aber unzureichend; in der ersten ist die Auflösung der Funktionalgleichung vieldeutig. Schlömilch[2]) zeigt, daß es unendlich viele Lösungen gibt. In der zweiten Auflösung ist die Möglichkeit der Reihenentwicklung nicht erwiesen.

Beweis von Ritter.[3])

Auf dem dritten angeführten Satz der Mechanik, dem Prinzip des kleinsten Zwanges, beruht der Rittersche Beweis.

Auf einen materiellen Punkt mögen in verschiedenen Richtungen die Kräfte $p_1 p_2 \ldots . p_n$ wirken. Würde ihm nur eine einzige Bewegung erteilt werden, dann wäre seine Geschwindigkeit in der Zeiteinheit

1) Grunerts Archiv 25, S. 387, 1855.
2) Zeitschrft. f. Math. u. Phys., II, S. 90.
3) Ritter, Das Prinzip d. kleinsten Zwanges. Göttingen 1853.

$\frac{pr}{m}dt$, den Weg $\frac{pr}{m}\frac{dt^2}{2}$ unter der Wirkung dieser Kräfte. Der Effekt bleibt derselbe, wenn dem $n^{\text{ten}}$ Teil der Masse das $n$-fache dieser Bewegung erteilt wird: $n\frac{pr}{m}\cdot\frac{dt^2}{2}$. Die Kräfte werden durch die „freien Bewegungen“ des $n^{\text{ten}}$ Teiles der Masse ersetzt. Die Masse $m$ wird in $n$ Teile geteilt, dann ist die „freie Bewegung“ des ersten $n\cdot\frac{p_1}{m}\frac{dt^2}{2}$, des zweiten $n\frac{p_2}{m}\frac{dt^2}{2}$ usw. Alle Massen sollen stets in einem Punkt vereinigt bleiben. Ohne diese Bedingung würden sie nach der Zeit $dt$ sich in den Endpunkten eines sternförmigen Liniensystems befinden. Sie werden so in einem Punkt vereinigt sein, daß für diesen die Summe der Produkte aus den einzelnen Massen in die Quadrate seiner Abstände von den Eckpunkten jenes Liniensystems ihren kleinsten Wert annimmt. Dieser Punkt wird gesucht ($\xi\,\eta\,G$). Die Anfangslage des materiellen Punktes sei der Koordinatenanfang, die Endpunkte der freien Bewegungen $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots$

Dann ist: $\sum_1^n(\xi - x_n) = 0, \quad \sum_1^n(\eta - y_n) = 0, \quad \Sigma(G - z_n) = 0$

oder $$\xi = \frac{\Sigma x_n}{n}, \quad \eta = \frac{\Sigma y_n}{n}, \quad G = \frac{\Sigma z_n}{n}.$$

Das ist die Gleichung des Schwerpunktes des Punktsystems.

Der Körper bewegt sich in der Zeit $dt$ nach den Endpunkten eines Polyeders hin, nach dessen Ecken die einzelnen Kräfte den $n^{\text{ten}}$ Teil der Masse bewegt haben würden.

Fällt der Schwerpunkt in den Koordinatenanfang, dann ist Gleichgewicht: $$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0.$$

Diese Bedingungen kann man auch schreiben:

$$\Sigma p\cos\alpha = 0, \quad \Sigma p\cos\beta = 0, \quad \Sigma p\cos\gamma = 0,$$

wobei $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Winkel der Kräfte mit den Koordinatenachsen sind.

Daraus ergibt sich dann die Konstruktion der Resultante.

#### 4. Beweise, welche von parallelen Kräften und Kräftepaaren ausgehen.

Während die zuletzt betrachteten Beweise sich nur auf gewisse Grundsätze (Axiome I — X) stützen, machen die folgenden noch die Annahme, daß daß Theorem für parallele Kräfte und Kräftepaare erwiesen sei. Als Axiome gelten hauptsächlich das Prinzip der Kraftverlegung und Superposition und das Parallelenpostulat. Damit der Zusammenhang dieses Teils der Abhandlung mit den drei vorhergehenden gewahrt

werde, sollen die Beweise für parallele Kräfte nicht vorausgenommen, sondern erst im nächsten Abschnitt gegeben werden.

Die Bestimmung der Größe der Resultante geschieht bei Monge und Poinsot nach der von Kästner gegebenen Methode (S. 25). Bei der Bestimmung der Richtung verfährt Monge ähnlich wie Kästner, führt dann aber durch eine Erweiterung des Prinzips der Kraftverlegung die Aufgabe auf parallele Kräfte zurück. Besonders interessant sind die Beweise von Möbius, welche auf der Theorie der Kräftepaare und Momente beruhen; in ihnen sind Anklänge an die spätere Behandlung nach den Prinzipien der Vektorenrechnung enthalten.

Beweis von Monge[1]) (Fig. 19).

Der Autor stützt sich auf den Satz:

„Wirkt auf einen Kreis eine Kraft in der Richtung der Tangente, dann kann sie unbeschadet nach irgend einem Punkte dieses Kreises verlegt werden."

Nach Vollendung des Parallelogrammes $ABCD$ fällt man von $D$ die Lote $DE$ und $DF$, so daß: $P:Q = DF:DE$.

Mit $DF$ wird um $D$ ein Kreis geschlagen, und die in $F$ wirkende Kraft $M$ nach $G$ verlegt. Es ist:

$$P:M = DG:DE.$$

Die Resultante der parallelen Kräfte an $E$ und $G$ geht durch $D$. Da $M = Q$ und $P$ und $Q$ durch $A$ und $D$ gehen, so hat die Resultante die Richtung $AD$.

Beweis von Poinsot[2]) (Fig. 20).

Da die beiden Kräfte in $A$ angreifen, so muß auch ihre Resultante durch diesen Punkt gehen. Um zu zeigen, daß sie auch durch $D$ geht, wird $DC = DG$ auf die Verlängerung von $BD$ abgetragen, an $C$ in der Richtung $GH$ die gleich- und entgegengesetzt gerichteten Kräfte $Q'$ und $Q'' = Q$ angebracht. Die Resultante der parallelen Kräfte $P$ und $Q'$ geht durch $D$, desgleichen die der gleichen Kräfte $Q''$ und $Q$. Da $Q'$ und $Q''$ sich aufheben, so geht die gesuchte Resultante durch $D$.

Eine vollkommen neu und einzig dastehende Methode der Konstruktion der Resultante gibt Minding[3]) (Fig. 21).

Er nimmt in der Einleitung zu seinem Werk das Kräfteparallelogramm als gegeben an, gibt aber dann bei Gelegenheit ohne Beweis eine Methode zur Auffindung der Resultante.

---

1) Monge, Traité de mécanique, 1796, S. 23.

2) Elements de statique, Paris 1834, S. 35.

3) Minding, Handbuch der theoret. Mechanik, S. 29. Berlin 1838.

An einem Stab $AB$ wirken die Kräfte $P$ und $Q$, welche sich verlängert in $C$ schneiden. Eine Kraft in $C$, den $P$ und $Q$ entgegengesetzt, hält das Gleichgewicht. Legt man durch $A$, $B$, $C$ einen Kreis, dann zieht eine Drehung von $P$ und $Q$ eine von $C$ nach sich, d. h. $C$ durchläuft die Peripherie. Die Resultante teilt den Winkel der Kräfte in dem Verhältnis: $P:Q:R = \sin MCB : \sin ACM : \sin ACB$

$= \sin MAB : \sin MBA : \sin AMB$

$= MB : MA : AB.$

Damit ist $M$ bestimmt und mit ihm die Resultante.

Die beiden Beweise von Möbius sind ebenfalls vollkommen neu. Der erste erinnert allerdings an die von Kästner gegebene Bestimmung der Größe der Resultante. Im zweiten werden die geometrischen Eigenschaften dreier Kugelsehnen direkt auf die Kräfte übertragen.

1. Beweis.[1])

Der Winkel der Komponenten, welche durch eine dritte Kraft im Gleichgewicht gehalten werden, wird zum Parallelogramm $AFDB$ ergänzt. Je zwei Gegenseiten werden als gleichwirkende Kräftepaare gedacht, so daß $FD$ Richtung der gemeinsamen Resultante ist. Da $CF$ die Kräfte $FA$ und $FB$ im Gleichgewicht hält, so fallen $CF$ und $FD$ in eine Gerade. Analog zeigt Möbius, daß $EF$ in dieselbe Gerade mit $FB$ fällt. Da $ADFE$ ein Parallelogramm ist, so folgt: $FD = EA = CF =$ der Resultante von $FA$ und $FB$ (Fig. 22).

2. Beweis[2]) (Fig. 23).

Möbius leitet folgenden Satz ab:

„Legt man durch einen Punkt mehrere Kugeln und desgleichen eine Gerade, welche gleich der Summe der Sehnen ist, die von den Kugelflächen auf der Geraden abgeschnitten werden, dann ist diese Strecke Sehne einer neuen Kugel, deren durch $M$ gelegte Durchmesser statisch ausgedrückt, die Resultante der durch $M$ gehende Durchmesser der ersten Kugel ist.“

Dasselbe gilt auch von Kreisen, d. h. zwei über zwei Strecken $DA$ und $DB$ beschriebene Kreise lassen sich zu einem dritten so zusammensetzen, daß die Summe der Sehnen:

$$Da + Db = Dc$$

ist. Daraus leitet er die Zusammensetzung der Kräfte her.

1) Möbius, Statik I, S. 38. 1837 und Werke III, S. 43.

2) Möbius, Statik I, § 80. 1837. Werke III, S. 109—112.

Die Kreise $A$, $B$, $C$ werden so geteilt, daß immer drei entsprechende Teilpunkte auf einer Geraden durch $D$ gehen ($D$ ist Teilpunkt) und die obige Gleichung erfüllt ist.

Da arc $DFE = 2 \angle DBE = 2 \angle ADB$,

so ist: arc $DGE = 2 \angle DCE = 2 \angle ADC$.

$300^0$ sei in $m$ Teile geteilt. Davon kommen $p$ Teile auf $\angle ADC$, $q$ Teile auf $CDB$. Wird die Peripherie in $m$ Teile geteilt, dann kommen auf den Bogen $DFE$ $2(p+q)$ Teile, auf $DGE$ $2\ p$ Teile zu liegen.

Ist $D$ Anfangspunkt der Teilung, dann liegen auf der Richtung $DBCA$: der $x^{te}$ Teilpunkt von $A$

der $x+2(p+q)^{te}$ „ „ $B$

der $(x+2p)^{te}$ „ „ $C$ immer mit $D$ in einer geraden Linie.

Zieht man durch $D$ zu den $m-1$ Teilpunkten gerade Linien, dann erhalten wir drei Systeme von Kräften und es ist immer:

$$Da = Db = Dc,$$

d. h. die Kräfte im Kreise $C$ sind gleichwertig mit den beiden andern in $A$ und $B$.

Die Resultante der in jedem Kreis wirkenden Kräfte findet er als Durchmesser.

### 5. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Über die Zusammensetzung paralleler Kräfte ist bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts wenig geschrieben worden Wir finden bei Archimedes[1]) einige Sätze, welche sich auf parallele Kräfte beziehen. Er behandelt das Problem rein statisch und geht von der Schwerkraft aus, welche er als parallel wirkend annimmt. Später finden wir die Zusammensetzung paralleler Kräfte bei der Theorie des Hebels und des Schwerpunktes behandelt. Varignon hat die Zusammensetzung paralleler Kräfte zweimal erwähnt. Er gibt die noch heute gültige Zusammensetzung eines Systems paralleler Kräfte, um den Schwerpunkt eines Körpers zu finden.[2]) Die einzelnen Kräfte sind in diesem Falle Schwerkräfte und lassen sich durch eine einzige ersetzen, welche durch ihre Größe, das Gewicht und den Angriffspunkt, den Schwerpunkt, bestimmt ist. Ferner leitet Varignon die Zusammensetzung paralleler Kräfte aus derjenigen konvergenter Kräfte ab.[3]) Rückt der Angriffspunkt in unendliche Ferne, dann werden die Kräfte parallel und die Resultante behält ihre ursprüngliche Richtung bei.

---

1) Archimedes' Werke II, S. 146—153. Ausgabe Heiberg.

2) Histoire de l'acad. Paris 1714.

3) Varignon, Nouvelle mécanique I, S. 95. 1725.

Eine andere Behandlung paralleler Kräfte, welche kinetischer Natur ist, gibt Lamy.[1])

Er teilt einen Stab $BC$ in $A$ so, daß:

$$BA : BC = \text{Kraft } C : \text{Kraft } B.$$

Sind die Kräfte gleich, dann fällt der Stab parallel mit sich. Ist $B > C$, dann fällt er in der Richtung $B$ schneller. Ist der Stab in $A$ befestigt, dann herrscht Gleichgewicht, es gelten also die Bedingungen des Gleichgewichtes.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts erscheinen die ersten Abhandlungen, welche mathematische Beweise für die Zusammensetzung paralleler Kräfte bringen. Diese Beweise sind teils auf das Kräfteparallelogramm, teils auf die parallelen Kräfte selbst gegründet. Die Axiome sind größtenteils dieselben wie bei sich schneidenden Kräften. Es kommt aber der Parallelismus als etwas Wesentliches hinzu.

Das Euklidische Postulat der Geometrie wird auf die Mechanik übertragen, indem man unter parallelen Kräften solche versteht, deren Richtungen sich nicht schneiden. Da sich das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen nicht herleiten läßt[2]), so muß es in die Reihe der Axiome gestellt werden.

Wie Bonola[3]) nachgewiesen hat, gestaltet sich die Zusammensetzung paralleler Kräfte im nichteuklidischen Raum wesentlich anders. Während für Kräfte, die auf einen Punkt wirken, das Parallelogramm der Kräfte gilt, trifft das für parallele Kräfte nicht zu. Im Fall paralleler Kräfte ist:[4])

$$R = 2\,P\,\varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ der Poissonschen Funktionalgleichung genügt.

Die Resultante wird nun für:

den Euklidischen Raum: $R = 2\,P\,\psi(x)$ $\quad \psi x = 1,$

„ Lobatscheffskyschen „ : $R = 2\,P\,\psi(x)$ $\quad \psi(x) > 1,$

„ Riemannschen „ : $R = 2\,P\,\psi(x)$ $\quad \psi(x) < 1.$

Die Prinzipien der Superposition und Verlegung der Kräfte treten besonders hervor und zwar in ähnlicher Weise wie beim Hebel. Im Gegensatz zu den konvergenten Kräften haben wir bei parallelen Kräften drei Angriffspunkte, welche in einer starren geraden Linie liegen oder sich dahin bringen lassen. Nach dem Prinzip der Symmetrie fällt die Resultante in den Raum zwischen den Komponenten, und ihr Angriffs-

1) Lamy, Nouvelle manière de demontrer les princ. théor. Paris 1689.

2) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1905, S. 5—10. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909, S. 123.

3) Liebmann-Bonola, Nichteuklid. Geometrie, S. 214—232. Leipzig 1908

4) Verhandl. d. I. Intern. Math. Kongresses, Leipzig 1898, S. 251: Andrade, Statique non-euclidienne.

punkt liegt auf der Verbindungslinie der Angriffspunkte der betreffenden Kräfte.

Nur wenige Beweise sind auf die Natur paralleler Kräfte gebaut und verlangen vorher keinen Beweis des Kräfteparallelogramms. Aber auch diese setzen die Zusammensetzung konvergenter Kräfte unbewußt voraus.

Der Beweis von Foncenex ist der einzige rein analytische, diejenigen von Monge, Poinsot und Poisson sind rein geometrischer Natur, desgl. der von Minding; Pontéculant und Burg gehen von einem System von Kräften aus und ziehen analytische Betrachtungen hinein. Der Beweis von Möbius ist nur auf die Theorie der Kräftepaare gestützt.

Beweis von Foncenex.[1])

Foncenex geht von den an einen Hebel $AB$ wirkenden parallelen Kräften aus. Auf den Verlängerungen des Hebels $AB$ trägt er $EA = AC = CB = BD$ auf und läßt auch in $E$ und $D$ die Kräfte $P$ wie in $A$ und $B$ angreifen.

Die Wirkung einer Kraft $P$, welche vom Unterstützungspunkt $C$ des Hebels den Abstand $x$ hat, drückt sich aus durch:

$$P \cdot F(x).$$

Foncenex gelangt dann zu der Funktionalgleichung:

$$P \cdot F(x)\ F(x) = 2\,P + PF(2x)$$
$$F(x)^2 = 2 + F(2x).$$

Als Lösung gibt er an:

$$F(x) = F(2x) = 2.$$

Das ist aber nur eine partikuläre, keine allgemeine Lösung der Funktionalgleichung. Dieser Irrtum Foncenexs ist zuerst von Riccati[2]), dann von D'Alembert[3]) und Laplace nachgewiesen worden. Riccati zeigt dies mit Hilfe hyperbolischer Funktionen, D'Alembert mittels der Exponentialfunktionen.

Beweis von Monge[4]) (Fig. 24).

Monge geht von drei sich das Gleichgewicht haltenden gleichen Kräften aus. Es werden an den Angriffspunkten $D$ und $E$ noch je zwei

1) Foncenex, Sur les principes fondamenteaux de la mécanique. Miscellanea Taurinensia, t. II, p. 305—15. (1760—61.) S. Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, S. 299. Halle 1881.

2) Riccati, Addiment. ad epist. de pot. aequivalentia. De Bononiensi Scientiarum et artium instituto comment. t. V. (1 Abt.) S. 219.

3) D'Alembert, Opusc. math. T. VI, S. 371. Paris 1775.

4) Monge, Traité de mécanique, S. 9. 1796.

unter Winkeln von 120° wirkende Kräfte angebracht, so daß Gleichgewicht herrscht ($p$, $q$, $p'$, $q'$). Diese vier Kräfte werden nach $F$ und $G$ verlegt, so daß ihnen dort die Kraft $P+Q$ das Gleichgewicht hält und folglich Resultierende von $P$ und $Q$ ist.

Er folgert dann:

„Teilt man eine Gerade in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und bringt in den Teilpunkten Kräfte an, dann ist die Resultante gleich der Summe derselben und geht durch den Mittelpunkt."

Daraus leitet er den Fall ungleicher Kräfte ab.

$AB$ wird so geteilt, daß $P:Q=AD:DB$.

Macht man: $BF=DB$, $AE=AD$, dann ist:

$$P:Q=ED:DF.$$

$AD$, $DB$, $AE$, $BF$ werden in ebensoviel Einheiten geteilt als $P$ und $Q$ angeben; $EF$ hat zweimal soviel Einheiten als $P+Q$ anzeigt. Die Mittelpunkte der Teilungen sind also die Angriffspunkte der Kräfte $\frac{P+Q}{2m}$. Ihre Resultante ist $P+Q$ und geht durch den Mittelpunkt $C$ von $EF$ und ist parallel zu $P$ und $Q$.

Da $AD=CB$, $BD=AC$, so ist:

$$P:Q=CB:CA.$$

Dadurch ist der Angriffspunkt bestimmt.

Beweis von Poinsot.[1])

Die Poinsotsche Bestimmung der Richtung wird bei den Beweisen gebraucht, welche sich auf die Theorie des Hebels stützen.

An der Angriffslinie $AB$ bringt er zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte an und zeigt, daß die Resultante der auf diese Weise konvergent gemachten Kräfte durch einen Punkt von $AB$ geht. Dabei setzt er das Kräfteparallelogramm, das er erst später mit Hilfe paralleler Kräfte beweist, voraus. Dann schließt er wie Monge, daß die Resultante von beliebig vielen zur Mitte symmetrisch liegenden Kräften durch diesen Punkt von $AB$ geht. Darauf stützt er den Beweis für kommensurable und inkommensurable Kräfte.

Die Größe der Resultante ist in beiden Fällen $P+Q$.

1. $P$ und $Q$ sind kommensurabel.

   Poinsot konstruiert ebenso wie Monge und zerlegt $P$ und $Q$ in $2m$ und $2n$ symmetrisch zu $A$ und $B$ angreifende Kräfte. Diese Kräfte stehen dann gleichweit von $C$ ab und die Resultante geht durch diesen Punkt. $P:Q=BC:AC$.

1) Poinsot, Elémens de Statique, Paris 1834, S 21.

2. Sind $P$ und $Q$ inkommensurabel, dann weist er nach, daß die Resultante weder links noch rechts von $C$ fallen kann, also auch durch $C$ gehen muß.

Beweis von Poisson[1]) (Fig. 25).

Die Größe bestimmt Poisson wie Poinsot durch Anbringen von gleichen und entgegengesetzten Kräften. Zur Bestimmung der Richtung zieht er die Parallelogramme $E'EOK$, $F'F'OK$, deren Diagonalen als Mittelkräfte angesehen werden können, so daß

$$S : P = EO : KO,$$
$$S : Q = FO : KO,$$
$$\text{daraus } P : Q = FO : EO.$$

Damit ist der Angriffspunkt $O$ bestimmt.

Auf S. 63 gibt Poisson eine analytische Bestimmung des Angriffspunktes aus:

$$P : Q = a : (a \mp x)$$
$$x = \frac{aP}{Q \pm P}.$$

Die beiden folgenden Beweise von Pontéculant und Burg sind im Gegensatz zu den vorhergehenden mehr analytisch gehalten, trotzdem beide auf keine Funktionalgleichung stoßen.

Pontéculant bezeichnet die parallelen Kräfte als Grenzfall der konvergenten, indem er den Winkel der Kräfte Null werden läßt. In dieser Hinsicht geht er nicht über Varignon hinaus.

Burg nimmt ein System paralleler Kräfte im Raum an und bestimmt nur die Koordinaten des Angriffspunktes der Mittelkraft.

Beweis von Pontéculant.[2])

Pontéculant verfährt folgendermaßen:

Die Gleichungen:

$$R \cos A = P \cos \alpha + P' \cos \alpha'$$
$$R \sin A = P \sin \alpha + P' \sin \alpha'$$
$$Rr = Pp + P'p'$$

gelten für ein System konvergenter Kräfte. Im Fall paralleler Kräfte wird $\pi = \alpha = \alpha'$.

Also:

$$R \cos A = \cos \alpha \, \Sigma P$$
$$R \sin A = \sin \alpha \, \Sigma P$$
$$R = \Sigma P$$
$$Rr = \Sigma Pp$$
$$r = \frac{\Sigma Pp}{\Sigma P}.$$

Damit ist die Resultante bestimmt.

1) Poisson, Traité de mécanique, Paris 1811, S. 34.

2) Pontéculant, Théorie analytique du syst. de monde, S. 25—26. Paris 1829.

Beweis von Burg.[1])

Ein System paralleler Kräfte greife in $M_1 M_1 \ldots$ an. Für zwei Kräfte ist das Moment der Resultante gleich dem der Seitenkräfte und analog, auf mehrere ausgedehnt, hat man:

$$RX = Px + Px_1 + \ldots = \Sigma Px$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R = P_1 + P_2 + \ldots\ldots = \Sigma P.$$

Dann sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Mittelkraft:

$$X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P} \qquad Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P} \qquad Z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Den Übergang von konvergenten zu parallelen Kräften benutzt Minding[2]) und leitet aus seinem Beweis sich schneidender Kräfte den Fall der parallelen ab, indem er $\angle \widehat{PQ} = \angle ACB = 0$ setzt.

Dann fällt $M$ in die Sehne $AB$ und es ist:

$$P : Q = MA : MB$$

und die Resultante geht in die Summe $P + Q$ über.

Den Schluß möge ein Beweis von Möbius[3]) bilden, welcher sich auf die Theorie der Kräftepaare stützt.

Zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare werden so gelegt, daß zwei Kräfte zusammenfallen. Dann ist die Mittelkraft gleich der Summe der anderen und jene sind den Breiten umgekehrt proportional.

Das zeigt er noch auf andere Weise:

Schneidet man die Verlängerungen der Kräfte in $F$, $G$, $H$, dann sind die Strecken $HF$, $GH$ den Abständen der $P$ und $Q$ von $R$ proportional.

Es ist:
$$P : Q = GH : HF$$
$$P : P + Q = GH : GH + HF \qquad P + Q = -R$$
$$P : Q : R = GH : HF : FG.$$

Eine der Kraft $R$ gleiche und entgegengesetzte Kraft ist die Resultante.

1) Burg, Comp. d. Mathem. Supplem. 1863.
2) Minding, Handbuch d. theor. Mechanik, S. 30. Berlin 1838.
3) Möbius, Werke III, Leipzig 1886, S. 40.

# Inhaltsübersicht.


Seite

Einleitung . . . . . 5

I. Teil . . . . . 6

1. Die Zusammensetzung der Bewegungen . . . . . 6
Aristoteles, Archimedes, Galilei, Roberval, Kant, Büsch.

2. Zusammensetzung der Kräfte . . . . . 10
Newton, Wallis, Varignon, Lamy, D'Alembert.

3. Die rein statische Behandlung der Kräftezusammensetzung . . . . . 13
Archimedes, Leonardo de Vinci, Stevin, Varignon, La Hire, Euler, Joh. Bernoulli.

II. Teil. Neuere Beweise des Kräfteparallelogramms . . . . . 17

1. Geometrische Beweise . . . . . 18
1. Gruppe: D. Bernoulli, D'Alembert, Lambert, Eytelwein, Skarella, Aimé.
2. Gruppe: Burg, Möbius, Cauchy, Raabe.
3. Gruppe: Duchayla, Kästner, Duhamel, Matzka, Sturm, Délègue.

2. Analytische Beweise . . . . . 27
1. Gruppe: Foncenex, D'Alembert, Poisson, Dippe, Navier, Schlömilch, Boltzmann.
2. Gruppe: Venini, D'Alembert.
3. Gruppe: Laplace, Burg, Pontéculant, Lehmann-Filhés, Hearn.

3. Beweise, welche auf Sätzen der Mechanik beruhen . . . . . 40
Kästner, Ide, Crelle, Lambert, Redtenbacher, Zernikow, Ritter.

4. Beweise, welche von parallelen Kräften und Kräftepaaren ausgehen . . 44
Monge, Poinsot, Möbius, Minding, Poisson.

5. Zusammensetzung paralleler Kräfte . . . . . 47
Foncenex, Monge, Poisson, Poinsot, Pontéculant, Burg, Minding.

# Lebenslauf.

Geboren bin ich, Ernst Goerges, am 5. April 1886 in Magdeburg als Sohn des Postsekretärs H. Goerges und seiner Ehefrau Hulda geb. Hickel. In Magdeburg besuchte ich das Königliche Domgymnasium, welches ich im Herbst 1904 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Ich besuchte die Universitäten Göttingen, Leipzig, Berlin, Halle und hörte Vorlesungen bei den Herren Professoren Runge, Wallach, Liebisch, Riecke, Husserl, Hölder, Hantzsch, Des Coudres, Schottky, H. A. Schwarz, Knoblauch, Planck, Frobenius, Schur, Blasius, Gutzmer, Wangerin, Vorländer, Buchholz, Schwarz und Dorn. Aller meiner verehrten Lehrer erinnere ich mich als dankbarer Schüler.

Zum Schluß sei es mir gestattet, meinem hochgeehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Gutzmer und Herrn Geheimrat Prof. Dr. Stäckel (Karlsruhe) für die stete Anregung und Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit meinen gehorsamsten Dank auszusprechen.

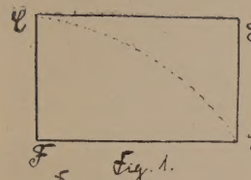


Fig. 1.

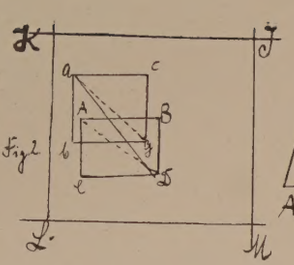


Fig. 2

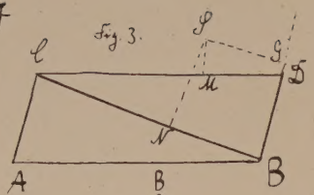


Fig. 3.

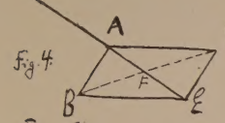
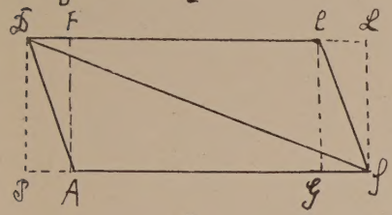


Fig. 4



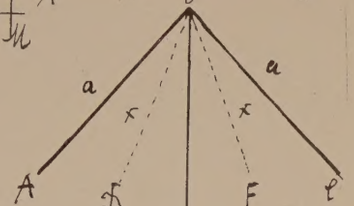


Fig. 6.



Fig. 7.

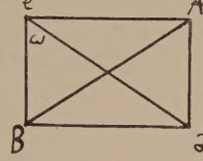


Fig. 8

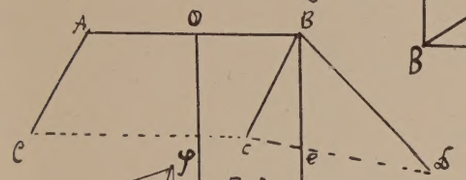


Fig. 5.

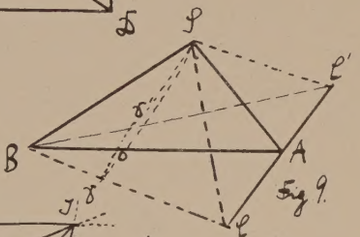


Fig. 9.

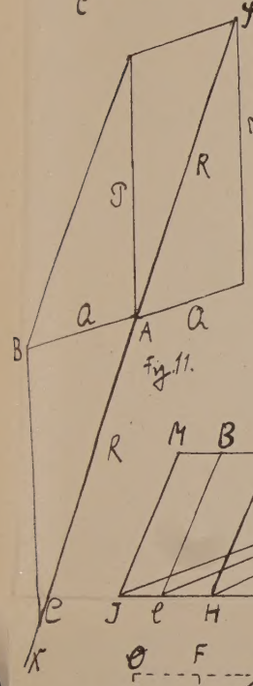


Fig. 11.

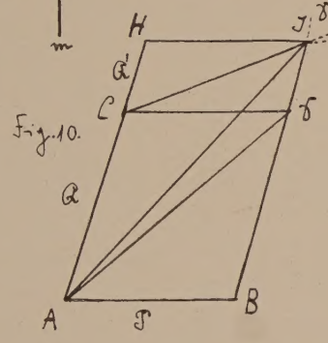


Fig. 10.

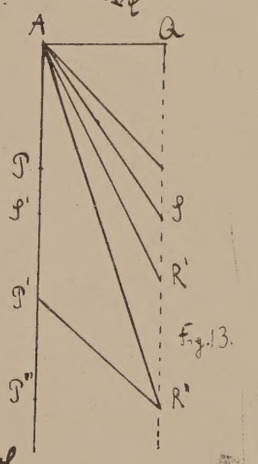


Fig. 13.

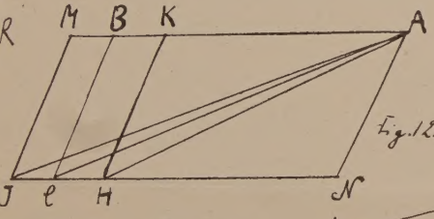


Fig. 12.

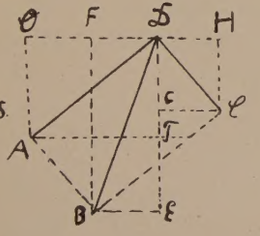


Fig. 15.

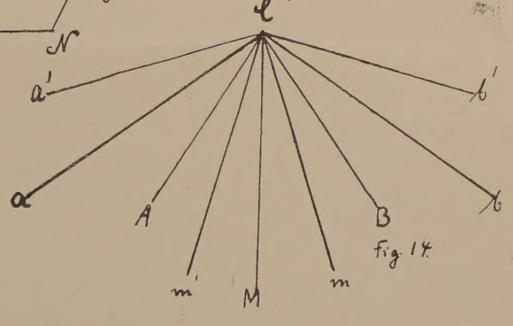


Fig. 14.

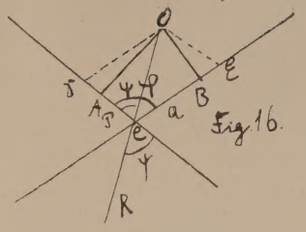


Fig. 16.

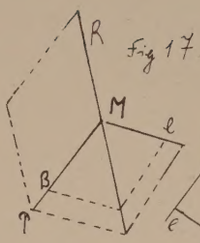


Fig. 17

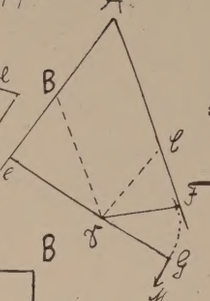


Fig. 19

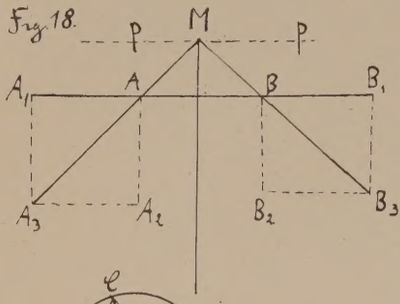


Fig. 18.

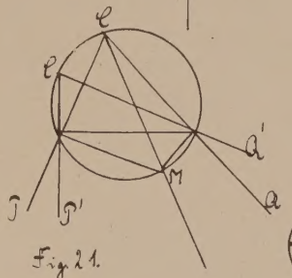


Fig. 21.

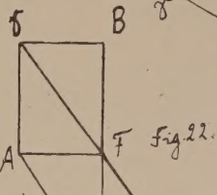


Fig. 22.

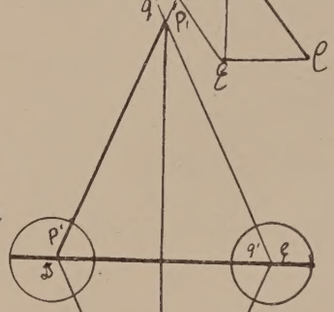


Fig. 24.

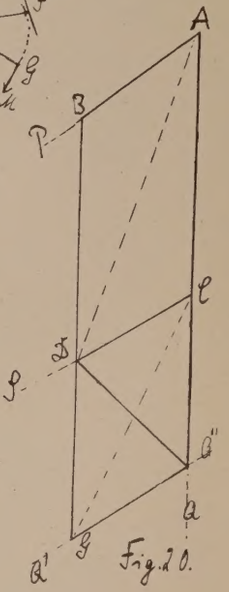


Fig. 20.

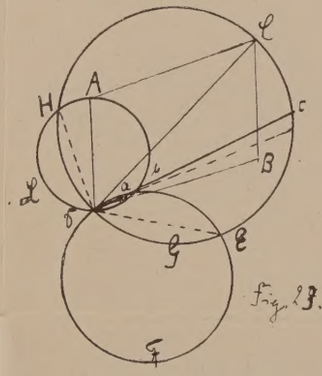


Fig. 23.

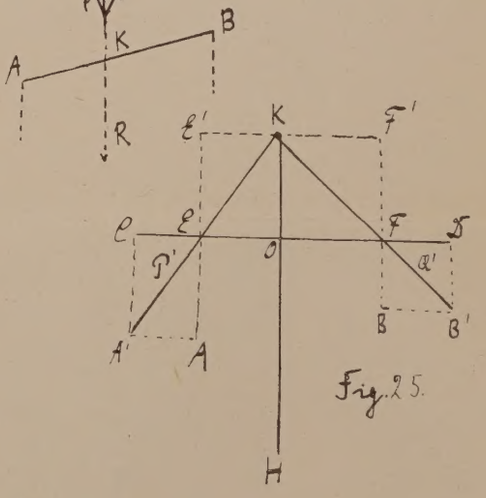


Fig. 25.